Baccalauréat S 2003

L'intégrale de septembre 2002 à juin 2003

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Antilles-Guyane septembre 2002 3

France septembre 2002 7

Polynésie spécialité septembre 2002 11

Nouvelle-Calédonie novembre 2002 14

Amérique du Sud décembre 2002 17

Pondichéry avril 2003 20

Liban juin 2003 25

Amérique du Nord juin 2003 28

Antilles-Guyane juin 2003 32

Asie juin 2003 35

Centres étrangers juin 2003 39

France juin 2003 43

La Réunion juin 2003 48

Polynésie juin 2003 52

✿ Baccalauréat S Antilles-Guyane ✿ septembre 2002

EXERCICE 1 **enseignement obligatoire**

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}.$$

a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.
On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au n-ième lancer »,
par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n,
par R_n l'évènement « on obtient rouge au n-ième lancer »,
par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de R_n,
par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

a. Déterminer a_1.

b. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.

c. En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = (R_n \cap R_n) \cup \left(R_n \cap \overline{R_n}\right)$, montrer que $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

d. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.

e. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 **enseignement obligatoire**

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$(unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_{A} et celle de z_{B}.

2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in [0\ ;\ 2\pi]$.
On considère l'application f qui tout point M de $(\mathscr{C})$, associe
$f(M) = M\mathrm{A} \times M\mathrm{B}$.

a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

3. **a.** En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b. En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE 2 **enseignement de spécialité**

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC] , [CD] et [DA].

On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. **a.** Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.

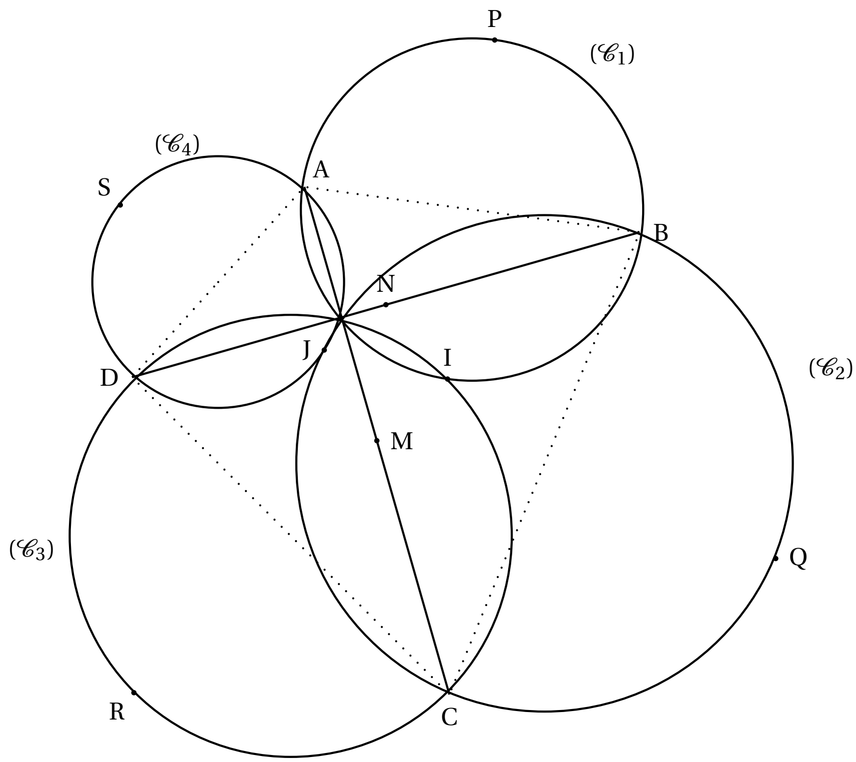
b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

c. Quelle est la nature du quadrilatère INJM ? On désigne par P et R les points diamètralement opposés à I sur, respectivement $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$ et par Q et S les points diamètralement opposés à J sur, respectivement $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

b. En déduire que J est le milieu de [PR].



PROBLÈME

Soit f la fonction dfinie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 0 \\ f(1) & = & 0 \\ f(x) & = & (\ln x)\times\ln(1-x), \quad \text{pour} \quad x\in]0\,;\,1[\end{cases}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, ainsi que le résultat suivant :

$$\text{pour} \quad \alpha>0, \quad \lim_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x=0.$$

Partie A - Étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

   b. En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Montrer que pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[,\quad f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$.

   Que peut-on en conclure pour $\mathscr{C}$?

3. Soit φ la fonction définie sur $]\,0\,;\,1[$ par :

$$\varphi(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x.$$

   a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0\,;\,1[$.

   b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur $]0\,;\,1\,[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur $]0\,;\,1[$.

c. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0\,;\,1[$.

4. **a.** Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0\,;\,1[$.

b. Donner le tableau de variations de f.

c. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,1[$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leqslant (\ln 2)^2.$$

d. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

Pour $t \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, on pose :

$$I_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x \ln x \,\mathrm{d}x, \quad I_2(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x, \quad I(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :

$$I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t^2 \ln t + \frac{t^2}{4};$$

$$I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{t^3 \ln t}{3} + \frac{t^3}{9}.$$

b. Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0.

2. Soit g et h les fonctions définies sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ par :

$$g(x) = -\left[x + \frac{x^2}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}.$$

a. Étudier sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ les variations de la fonction

$$x \longmapsto \ln(1-x) - g(x).$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \leqslant g(x).$$

c. Par un procédé analogue, montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \geqslant h(x).$$

d. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

3. **a.** Montrer que $-I_1(t) - \dfrac{1}{2}I_2(t) \leqslant I(t) \leqslant -I_1(t) - I_2(t)$.

b. En supposant que $I(t)$ admet une limite note ℓ quand t tend vers 0, donner un encadrement de ℓ.

Baccalauréat S France septembre 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

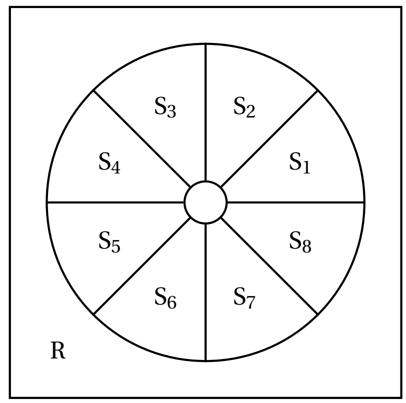
Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :

– un disque D de rayon 1 cm,

– 8 secteurs S_1, S_2, ..., S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D′ de même centre et de rayon 9 cm,

– une zone R entre le disque D′ et le bord du carré.

On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.



1. **a.** Déterminer la probabilité $p(\text{D})$ pour que le point soit placé dans le disque D.

   b. Déterminer la probabilité $p(\text{S}_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2. Pour cette question **2.**, on utilisera les valeurs approchées suivantes :
   $p(\text{D}) = 0{,}008$ et pour tout k appartenant à $\{1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$,
   $p(\text{S}_k) = 0{,}078\ 5$.
   À cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :
   – un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
   – un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$;
   – un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.
   On note X la variable alatoire égale au gain algébrique obtenu.

   a. Calculer la probabilité $p(\text{R})$ pour que le point soit placé dans la zone R.
   Calculer l'espérance de X.

   b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

   c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
   Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geqslant 0,9$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-\text{i})(z-\text{i})}{z-1}.$$

1. **a.** Calculer l'affixe du point C′ associé au point C d'affixe $-\mathrm{i}$.

   b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.

   a. Montrer l'égalité :

$$Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}.$$

   b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

   c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.

3. **a.** Écrire le nombre complexe $(1-\mathrm{i})$ sous forme trigonométrique.

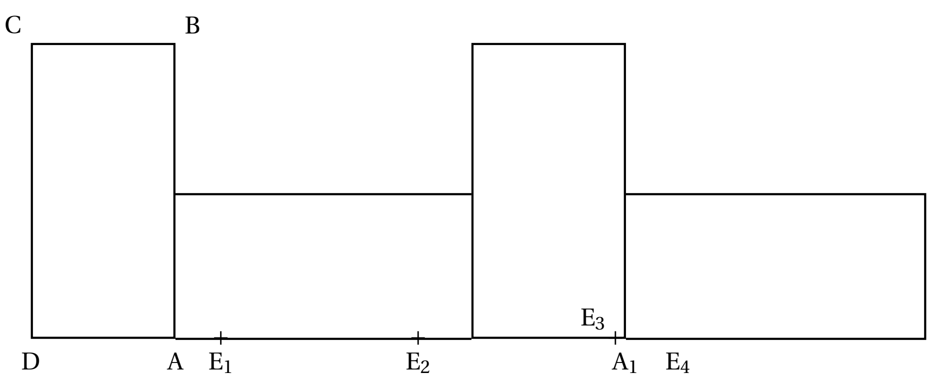
   b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que : $\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

   c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

   d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



On considère un rectangle direct ABCD vérifiant : AB = 10 cm et AD = 5 cm.

1. Faire une figure : construire ABCD, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. **a.** Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(\mathrm{A}) = \mathrm{N}$ et $r'(\mathrm{B}) = \mathrm{P}$. Déterminer l'angle de r'.

   b. Montrer que l'image de ABCD par r' est AMNP.

   c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles ABCD et AMNP par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$. Sur la demi-droite [DA), on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k\geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\mathrm{D}A_k = 5 + 15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\mathrm{D}E_n = 6,55n$.

   a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?

b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.
Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.
Vérifier que les nombres $n = 7\ 100$ et $k = 3\ 100$ forment une solution de cette équation.
Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

PROBLÈME **11 points**

Partie A :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.
   a. Déterminer les limites de g en 0 et en $-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
   b. Calculer $g'(x)$. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\ +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donnée sur la feuille annexe avec sa tangente au point d'abscisse e.
On admet l'égalité suivante : $f(x) = 2x\left[a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right]$ où a, b et c désignent trois réels.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.
2. À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $f'(\mathrm{e})$.
3. En déduire l'égalité : $f(x) = 2x\left[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right]$ pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[$.
4. Déterminer la limite de f en 0. On pourra poser $t = -\ln x$ et vérifier pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[$ l'égalité :
$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-t}\left[2t^2 + 3t + 2\right].$$
5. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
6. Montrer pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[$ l'égalité : $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$.
7. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

Partie C :

1. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ de la feuille annexe, la courbe représentative Γ de la fonction g étudiée en **partie A**.
2. **a.** Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1} - 1$.
   b. Calculer, et exprimer en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{4}$ et $x = 2$.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0{,}1\,;\,0{,}3]$ par : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.
   a. Montrer que, pour tout x appartenant $[0{,}1\,;\,0{,}3]$, on a : $\varphi'(x) > 0$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède une solution unique α sur $[0,1 : 0,3]$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie D :

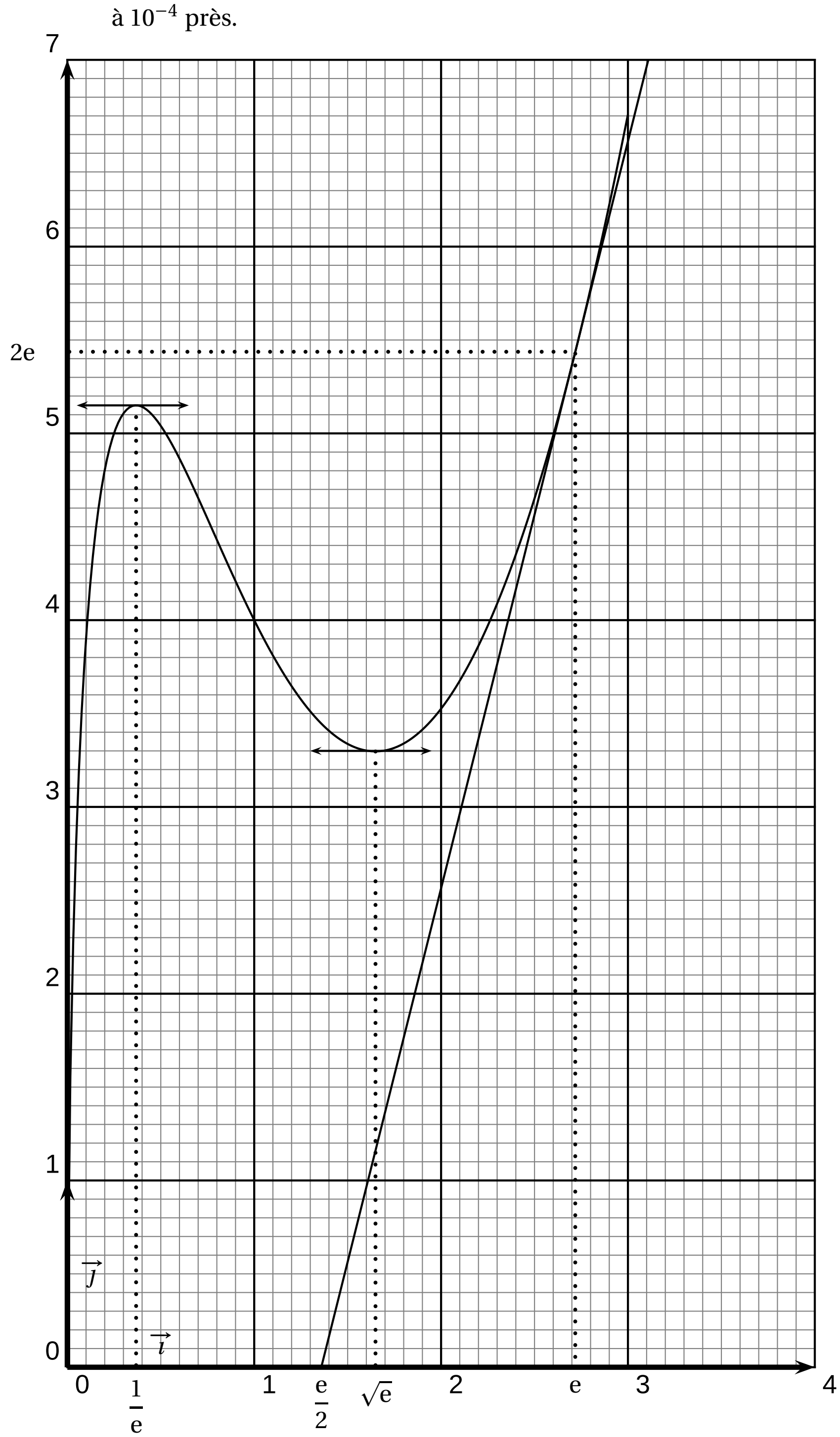
1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

2. On définit la fonction h sur $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression suivante : $h = g \circ f$.

a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de h.

b. Déterminer le sens de variation de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. Montrer que $h(\alpha) = g \circ g(\alpha)$. Déterminer une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-4} près.



Baccalauréat S Polynésie septembre 2002

EXERCICE 1

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.

- 85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.
- 20 % des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.
- 12% des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les évènements suivants :

R : le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle

D : le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels.

1. En utilisant les notations R et D, exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilités ; les résultats seront donnés sous forme décimale.
2. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :

   a. entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels ;

   b. entraîne seulement des frais de réparation matérielle ;

   c. entraîne seulement des frais de dommages corporels ;

   d. n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels ;

   e. entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.
3. On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces derniers 60 % entraînent des frais de dommages corporels.

   a. On choisit un dossier ; quelle est la probabilité pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?

   b. On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels.

EXERCICE 2

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes ; résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1\sqrt{3} - z_2 & = & -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} & = & -2\mathrm{i} \end{array}\right.$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad z_B = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle.

   Placer les points A et B.

3. Calculer module et argument de $\dfrac{z_A}{z_B}$.

   En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.

4. Déterminer l'affixe du point C tel que ACBO soit un losange. Placer C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = e^{-\frac{i\pi}{6}} z.$$

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A$'$, B$'$, et C$'$ images par f de A, B et C ?
3. Quelle est l'aire du triangle A$'$B$'$C$'$ en cm^2 ?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, toutes les courbes demandées seront tracées dans ce repère (unité graphique 4 cm).

Partie A - Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},$$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que pour tout x appartenant $\mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
3. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$? En déduire les équations des asymptotes éventuelles à Γ.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations ; en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. **a.** α étant un nombre appartenant à $]-1\ ;\ 1[$, montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique x_0. Exprimer alors x_0 en fonction de α.

   b. Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B - Tangentes à la courbe

1. Déterminer une équation de la tangente Δ_1 à Γ au point d'abscisse 0.
2. Montrer que pour tout nombre t réel, $f'(t) = 1 - [f(t)]^2$. En déduire un encadrement de $f'(t)$.
3. Pour x positif ou nul, déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$, puis justifier que $0 \leqslant f(x) \leqslant x$. Quelles sont les positions relatives de Γ et Δ_1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.
5. Montrer que le point B de la courbe Γ, d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\dfrac{1}{2}$ a pour coordonnées :

$$\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ ;\ 1\right).$$

6. Tracer Γ, Δ_1 et Δ_2. On placera les points A et B.

Partie C - Calcul d'intégrales

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; en déduire une primitive de f.

2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$?
Hachurer cette surface sur la représentation graphique.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x\left(1 - [f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}\right).$$

En déduire $\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2002

Exercice 1 5 points

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.

Soit X la variable alatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématiques est-elle strictement supérieure à 10 ?
3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :
   - soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 €,
   - soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3 €.

   Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

Exercice 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

$$P(z) = z^3 + \left(14 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + \left(74 - 14\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 74\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

   a. Déterminer le nombre réel y tel que $\mathrm{i}y$ soit solution de l'équation $P(z) = 0$.

   b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$

   c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

   a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -7+5\mathrm{i}$; $z_{\mathrm{B}} = -7-5\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{I}} = \mathrm{i}\sqrt{2}$.

   b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

   c. Placer le point C d'affixe $z_{\mathrm{C}} = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point N tel que ABCN soit un paralllogramme.

   d. Placer le point D d'affixe $z_{\mathrm{D}} = 1+11\mathrm{i}$. Calculer $Z = \dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{B}}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
   b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.
   c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 84 \\ ab & = & d^3 \end{array}\right. \quad \text{avec } d = \text{pgcd}(a\,;b)$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

Problème 10 points

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 2 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (3+x)\text{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\text{I} = \displaystyle\int_{-3}^{0} x\text{e}^{-\frac{x}{2}}\,\text{d}x$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples $(x,\ y)$ tels que $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ et $x \leqslant 0$.
5. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   Soit α la solution non nulle, montrer que : $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.
   b. Plus généralement, déterminer **graphiquement** suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3\text{e}^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\varphi(x) = x$
2. Soit φ' et $\varphi''(x)$ les dérivées première et seconde de la fonction φ.
   a. Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Justifier que $\varphi'(\alpha) = \dfrac{\alpha+3}{2}$.
   b. Étudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.
   c. On se place désormais dans l'intervalle $\text{I} = [-2\,;\ \alpha]$.
3. Montrer que, pour tout x appartenant I ;
   a. $\varphi(x)$ appartient 1.
   b. $\dfrac{1}{2} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$

c. En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - x) \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - x).$$

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \varphi\left(u_{n-1}\right) \end{array}\right.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.

b. Justifier que, pour tout entier n,

$$0 \leqslant \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}\left(\alpha - u_n\right) \qquad \text{puis que} \qquad 0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

d. Déterminer le plus petit entier p tel que : $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leqslant 10^{-2}$.

Donner une approximation décimale 10^{-2} près de u_p, à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud ∽ décembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et - 2. À tout point M d'affixe z, z différent de 2, on associe le point N d'affixe $\overline{z}$ et M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}$$

1. Calculer z' et $|\overline{z'}|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1+\text{i}$.
2. **a.** Interpréter géométriquement $|z-2|$ et $|\overline{z'}-2|$.

   b. Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de M'.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z ($z \neq 2$) tels que $M' = \text{B}$.
4. On note $Z_{\overrightarrow{\text{A}M}}$ et $Z_{\overrightarrow{\text{B}M'}}$, les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}M'}$.

   Montrer que, pour tout point M distinct de A et n'appartenant pas $\mathcal{E}$, le quotient $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\text{A}M}}}{Z_{\overrightarrow{\text{B}M'}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.
5. Un point M distinct de A, n'appartenant pas $\mathcal{E}$, étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M'. On illustrera par une figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ldots11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2 001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n-1}{9}$.
2. On considère la division euclidienne par 2 001 : expliquer pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

   Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$).

   Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2 001 ?
3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.

   Démontrer l'égalité $a_m - a_n = a_{m-n} \times 10^k$.
4. Calculer le PGCD de 2 001 et de 10.

   Montrer que si 2 001 divise $a_m - a_k$, alors 2 001 divise a_{m-k}.
5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2 001.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
   - **a.** Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
   - **b.** Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
   - **c.** Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?
2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.
   - **a.** Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3$^{\text{e}}$ boule tirée est noire » vaut $\dfrac{1}{4}$.
   - **b.** Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

PROBLÈME **10 points**

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{g(x) = \mathrm{e}^{x}(1-x)+1.}$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\,1{,}27\,;\,1{,}28\,]$; on note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[$.
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

B. Étude de la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+2}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interprter graphiquement ce résultat.
2.
   - **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   - **b.** Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x+2$ est une asymptote pour $\mathscr{C}_f$.
   - **c.** Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (d).
3.
   - **a.** Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la partie **A)**.
   - **b.** Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
   - **c.** Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

C. Encadrements d'aires

Pour tout entier naturel n, tel que $n \geqslant 2$, on note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des points $M(x,\ y)$ du plan , dont les coordonnées vérifient : $2 \leqslant x \leqslant n$ et $2 \leqslant n \leqslant f(x)$ et on appelle $\mathscr{A}_n$ son aire, exprimée en unités d'aire.

1. Faire apparaître $\mathscr{D}_5$ sur la figure.

2. Démontrer que pour tout x , tel que $x \geqslant 2$, on a :

$$\frac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1} \leqslant x\mathrm{e}^{-x}.$$

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_2^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.
4. Écrire un encadrement de $\mathscr{A}_n$ en fonction de I_n.
5. On admet que $\mathscr{A}_n$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la limite de $\mathscr{A}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
Donner une interprétation géométrique de ce dernier rsultat.

Baccalauréat série S Pondichéry mars 2003

EXERCICE 1 **4 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \quad \text{et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f\ : x \longmapsto x(2-x)$.

c. Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$.

2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;\,1[$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Que peut-on en déduire ?

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

a. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Première partie

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(\text{E}) \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2 + bz + c\right) = 0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -2 - 2\text{i},\ z_{\text{B}} = 2 \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = -2 + 2\text{i}.$$

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.
3. Soit E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.
   b. Placer les points E et F.
4. **a.** Vérifier que : $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \text{i}$.
   b. En déduire la nature du triangle AEF.
5. Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité
Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Première partie
ABC est un triangle direct du plan orienté.
On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].
Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe sur laquelle on raisonnera. Cette figure sera jointe à la copie.
d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.
d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.
d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.
A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3, B_1 celui de d_1 et d_2 et C_1 celui de d_2 et d_3.

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.
2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie
Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
A - Construction de la figure

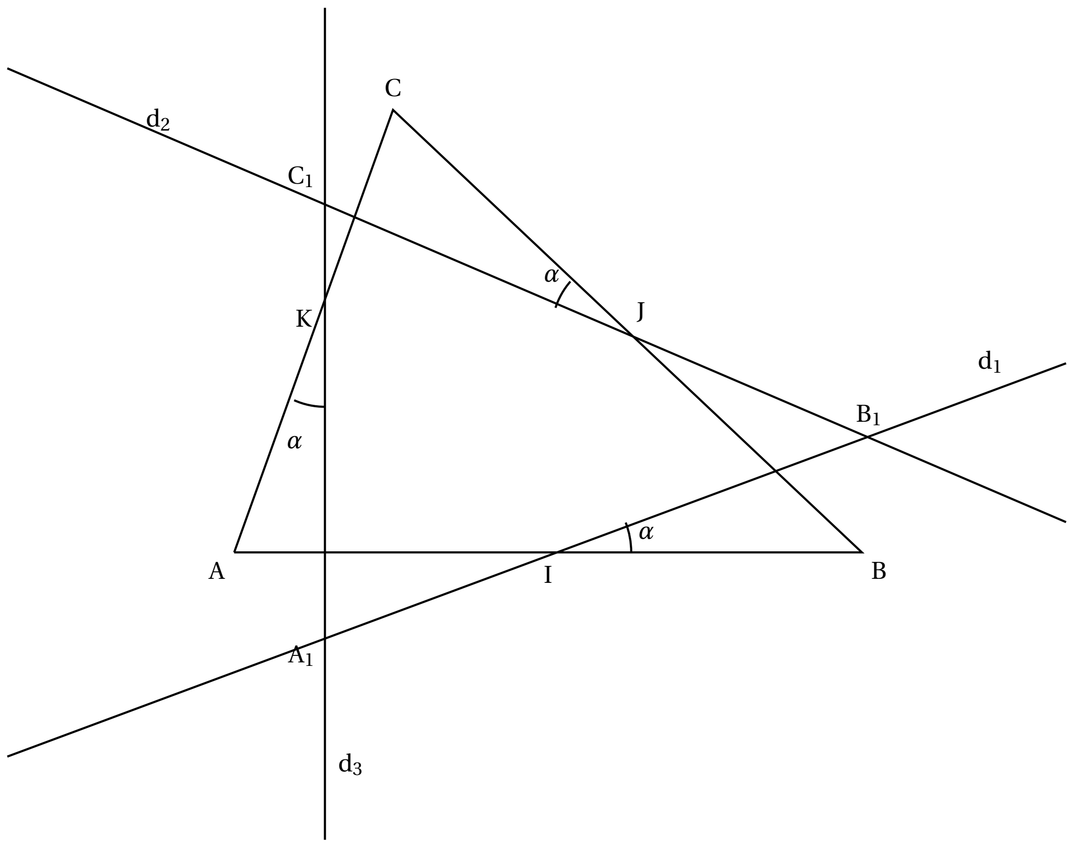
1. Placer les points $A(-4-6\text{i})$, $B(14)$, $C(-4+6\text{i})$, $A_1(3-7\text{i})$, $B_1(9+5\text{i})$ et $C_1(-3-\text{i})$.
2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.
3. Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.
   On admettra que B_1, J, C_1 *d'une part et* C_1, K, A_1 *d'autre part sont alignés.*
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}\right)$.
   On admettra que $\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ *et que* $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?

B - Recherche d'une similitude directe transformant ABC en $A_1B_1C_1$
On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C en A_1, B_1 et C_1.

1. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right)z + 2 - 2\text{i}$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s.

2. **a.** Déterminer le rapport et l'angle de s.
   b. Déterminer l'affixe du centre Ω de s.
3. Que représente le point Ω pour ABC ?

Le candidat joindra cette figure à sa copie



PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

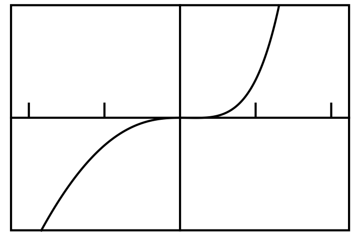
Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjectures

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

a. le sens de variations de f sur $[-3\ ;\ 2]$?

b. la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?



Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les complèter.

Partie A : contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)\text{e}^{x-1} - 1$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
   - **a.** Calculer les limites de $g(x)$ quans x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
   - **b.** Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   - **c.** En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.
   - **d.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
   - **e.** Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   - **b.** En déduire le sens de variations de la fonction f.
   - **c.** Que pensez-vous de votre première conjoncture ?

Partie B : contrôle de la deuxime conjoncture

On note $\mathscr{C}$ la courbe reprsentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.
   - **a.** Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0\,;\,1]$, puis déterminer le sens de variations de h sur $[0\,;\,1]$.
   - **b.** En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3.
   - **a.** Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$.
   - **b.** Préciser alors la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
   - **c.** Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C : tracé de la courbe

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de $\mathscr{C}$ correspondant à l'intervalle $[-0,2\ ;\ 0,4]$, dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ avec les unités suivantes :

- sur l'axe des abscisses 1 cm représentera 0,05.
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représentera 0,001.

1. Recopier le tableau suivant et complèter celui-ci l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n \times 10^{-4}$ (n entier relatif).

x	$-0,2$	$-0,15$	$-0,1$	$-0,05$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
$f(x)$													

2. Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D : calcul d'aire

On désire maintenant calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln 2$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \longmapsto x^2 \mathrm{e}^x.$$

2. En déduire une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
3. Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ puis en donner une valeur approchée en cm^2.

Baccalauréat série S Liban mai 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités $p_2,\ p_3$ et p_4.

2. On considère les évènements suivants :

B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,

U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».

  a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.

  b. Exprimer la probabilit de l'évènement U_n en fonction de n.

  c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

  a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

  b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = \frac{3}{2} + 6\text{i}$, $z_{\text{B}} = \frac{3}{2} - 6\text{i}$; $z_{\text{C}} = -3 - \frac{1}{4}\text{i}$, $z_{\text{P}} = 3 + 2\text{i}$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}\text{i}$.

  a. Déterminer l'affixe z_{Q} du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\vec{w}$.

  b. Déterminer l'affixe z_{R} du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

  c. Déterminer l'affixe z_{S} du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

  Placer les points P, Q, R et S.

3. a. Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
   b. Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
   c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.
4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 2x_n - 1$$
$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 2y_n + 3.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. a. Calculer le pgcd de x_8 et x_9, puis celui de $x_{2\,002}$ et $x_{2\,003}$. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour $x_{2\,002}$ et $x_{2\,003}$ d'autre part ?
   b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.
   b. Exprimer y_n en fonction de n.
   c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
   d. On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
   Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire *g*
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\text{e}^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que :

$$0,94 < \alpha < 0,941.$$

4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B Étude d'une fonction
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 5)\left(1 - \text{e}^{-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Calculer $f'(x)$, ou f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Dresser le tableau de variations de f.
4. a. Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.
   b. Étudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$.
   En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = 2x-5$, est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
6. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie C - Calcul d'aires

À l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$.

Partie D - Étude d'une suite de rapports de distances

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n, et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$; soit u_n le réel défini par :

$$u_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}.$$

2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b. Calculer la limite de la suite (u_n). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Baccalauréat série S Amérique du Nord juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, page 5, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0,\ +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0,\ t[$, notée $p([0,\ t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p([0,\ t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t,\ +\infty[)$ est :

   a. $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ **b.** $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ **c.** $1 + \mathrm{e}^{-\lambda t}$

2. La valeur de t pour laquelle on a $p([0,\ t[) = p([t,\ +\infty[)$ est :

   a. $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ **b.** $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ **c.** $\dfrac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

   a. $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ **b.** $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ **c.** $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

   a. $p([1,\ +\infty[)$ **b.** $p([3, +\infty[)$ **c.** $p([2\ ;\ 3[$

   Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

   a. 0,552 3 **b.** 0,548 8 **c.** 0,451 2

6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable alatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.

   La valeur la plus proche de la probabilité de l'évènement « $X = 4$ » est :

   a. 0,555 5 **b.** 0,802 2 **c.** 0,160 7

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4\mathrm{i}$, $z_1 = -1 - 4\mathrm{i}$, $z_2 = -4 - \mathrm{i}$.

1. **a.** Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(\mathrm{A}_0) = \mathrm{A}_1$ et $S(\mathrm{A}_1) = \mathrm{A}_2$.

b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{-3+\mathrm{i}}{2}$.

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'.

Vérifier la relation : $\omega - z' = \mathrm{i}(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $\mathrm{A}_{n+1} = S(\mathrm{A}_n)$ et on pose $u_n = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. **a.** Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}} = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.

2. **a.** Vérifier que : $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Tracer le cercle Γ_1.

3. **a.** Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z+\overline{z}) + z\overline{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.

b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.

b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.

5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.

On posera : $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.

On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.

a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.

b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(\mathrm{C})$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(\mathrm{C})$ appartient un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{x})$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On rappelle que : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$.

   Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   c. En déduire que la courbe admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

   a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,~+\infty[$.

   b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(\mathrm{e}^{x})$, f' désignant la fonction dérivée de f.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B : comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction F.

2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{t}} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{1+\mathrm{e}^{t}}$ et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$.

   b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

   c. Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{array}{llll} (1) & F(x) & = & x - \ln(1+\mathrm{e}^{x}) - f(x) + 2\ln 2.\\ (2) & F(x) & = & \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) - f(x) + 2\ln 2.\end{array}$$

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [F(x) - x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C : étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}\ln(1+\mathrm{e}^{k}).$$

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. **a.** Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   b. Comparer u_n et $F(n)$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Annexe à rendre avec la copie

Réponses à l'exercice 1 (mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

	(a)	(b)	(c)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

Baccalauréat série S Antilles-Guyane juin 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm). On considère les points A et B d'affixes respectives A$(3+2\text{i})$ et B$(-1+4\text{i})$. Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés $\text{OA}_1\text{A}_2\text{A}$ et OBB_1B_2.

1. **a.** En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'affixe de A_2. En déduire l'affixe du centre I du carré $\text{OA}_1\text{A}_2\text{A}$.

   b. En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'affixe de B_1. En déduire l'affixe du centre J du carré OBB_1B_2.

2. Calculer l'affixe du milieu K du segment [AB]. À l'aide des affixes des différents points, calculer les longueurs KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{KI}}, \overrightarrow{\text{KJ}}\right)$. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

   a. Définir la loi de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?

3. **a.** Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

   Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

   b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 0{,}000\ 7\text{e}^{-0{,}000\ 7x}.$$

   Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

   b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

   Que valent a_1 et b_1 ?

   D'après les calculs de la question **1) a)**, donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

   a. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   b. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

   En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

   c. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

   En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

PROBLÈME **11 points**

A. On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
$\boldsymbol{y' - 2y = 2\left(e^{2x} - 1\right)}$**.**

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + 1$$

   est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la **partie B**.

▷B. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{2x} + 1.$$

1. Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$.

   b. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

   c. Interpréter graphiquement les résultats des questions **a.** et **b.**.

C. On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x}.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.

3. Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variations (on pourra utiliser la **partie B)**.

4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, avec pour units : 4 cm sur $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$ et 2 cm sur $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près, construire la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de x comprises entre -2 et 1.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	$-0,2$	$-0,1$	$-0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,2$	$0,5$	1
$f(x)$												

5. Soit f_1 la fonction définie par $\begin{cases} f_1(x) & = & f(x),\ x \neq 0 \\ f_1(0) & = & 0 \end{cases}$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En supposant que f_1 est dérivable en 0, expliquer comment on peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé $f'(0)$; faire cette lecture graphique. Quel résultat de limite cela permet-il de conjecturer ?

D. On se propose de trouver un encadrement de l'intégrale :

$$\mathrm{J} = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que pour tout x de $[-2\,;\,-1]$ on a : $-\dfrac{0,86}{x} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x} \leqslant -\dfrac{0,99}{x}$.

En déduire un encadrement de J d'amplitude 0,1.

Baccalauréat S Asie juin 2003

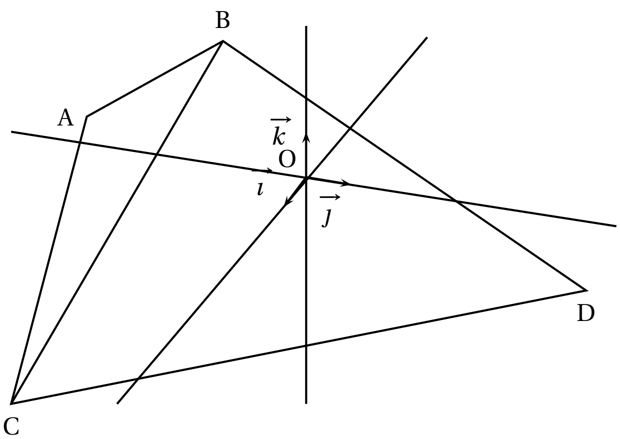
Exercice 1 **5 points**

Commun tous les candidats

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}(3\,;\,-2\,;\,2) \quad ; \quad \mathrm{B}(6\,;\,1\,;\,5) \quad ; \quad \mathrm{C}(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit P′ le plan orthogonal la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de P′.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P′.

Partie B

1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
3. Montrer que l'angle géométrique BDC a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. **a.** Calculer l'aire du triangle BDC.
   b. En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Exercice 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 2(1+\mathrm{i})z.$$

   On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où $x,\ y,\ x'$ et y' sont des nombres réels.

a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel. Montrer que $\mathscr{H}$ est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera (l'étude de la ronction h n'est pas demandée). $\mathscr{H}$ est tracée sur ie graphique ci-dessous.

2. Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1+\mathrm{i})$ appartient à Γ et $\mathscr{H}$.

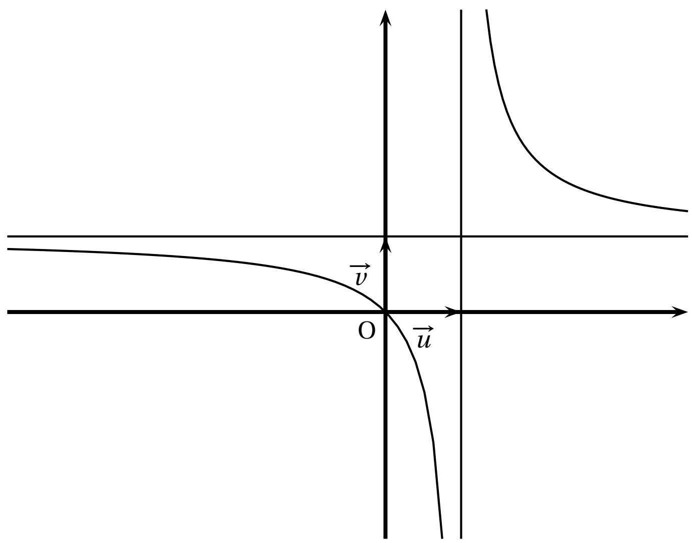
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On note B et C les points tels que R(A) = B et R(C) = A.

a. Montrer que R(B) = C et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c. Montrer que B et C appartiennent à Γ et $\mathscr{H}$.

d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous.



EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}\left(3n^3 - 11n\,;\,n+3\right) = \text{PGCD}(48\,;\,n+3).$$

4. **a.** Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

PROBLÈME **11 points**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathscr{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes que l'on déterminera.
2. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.
3. Soit I le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de I.
4. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.
   a. Étudier les variations de la fonction g.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;\,2[$ et $]2\,;\,4[$. Soit α la solution appartenant $]2\,;\,4[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. **a.** Montrer que $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en deux points.
   b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :
   $$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
6. Tracer $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

Partie B

1. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan définie par les inégalités suivantes :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} 1 \leqslant & x & \leqslant \alpha \quad (\alpha \quad \text{est le réel défini dans la partie A}) \\ 0 \leqslant & y & \leqslant f(x) \end{array}\right.$$
   a. Déterminer l'aire de $\mathscr{D}$, notée $\mathscr{A}(\alpha)$, en unités d'aire (on utilisera une intégration par parties).
   b. Montrer que $\mathscr{A}(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $\mathscr{A}(\alpha)$ 10^{-2} prs.
2. Soit la suite (I_n) définie pour n supérieur ou égal à 1 par :
   $$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   a. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :
   $$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$
   b. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

c. Soit $S_n = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \cdots + I_n$. Calculer S_n puis la limite de la suite (S_n).

Partie C

On considère, pour tout n supérieur ou égal à 1, la fonction f_n, définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^{2n}}.$$

1. Calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n.
2. Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$. Soit x_n la solution de cette équation.
3. Déterminer la limite de la suite (x_n).

Baccalauréat série S Centres étrangers juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

   a. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \dfrac{1}{2}$.

   c. Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$.

   d. En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$.

   On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n$.

2. On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est convergente.

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

   $$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

   $$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$

   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n \leqslant 4u_5$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

EXERCICE 2 **6 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable alatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$p(D \leqslant A) = \int_0^A \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millime.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

   a. comprise entre 50 et 100 km ;

   b. supérieure à 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.

   a. Au moyen d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{I}(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x$ où A est un nombre réel positif.

   b. Calculer la limite de $\mathrm{I}(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).

4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.
   d tant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

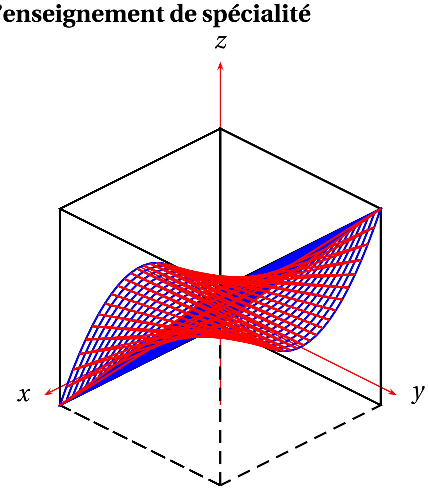
   a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.

   b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

EXERCICE 2 **6 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface **T** d'équation : $x^2 y = z$ avec $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
La figure ci-contre est une représentation de la surface **T**, dans le cube de centre O et de côté 2.



1. Éléments de symétrie de la surface **T**.

   a. Montrer que si le point $M(x,\ y,\ z)$ appartient à **T**, alors le point $M'(-x,\ y,\ z)$ appartient aussi à **T**. En déduire un plan de symétrie de **T**.

   b. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de **T**.

2. Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles aux axes.

   a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (xOz).

   b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan $(y\mathrm{O}z)$.

3. Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan $(x\mathrm{O}y)$ d'équations $z = k$, avec $k \in [0 ; 1]$.

   a. Déterminer l'intersection de la surface **T** et du plan d'équation $z = 0$.

b. Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0,\ 0,\ k)$. Déterminer, dans le repère $\left(K\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'équation de la courbe d'intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.

c. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $\left(K\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.

$$(\mathrm{D}) = M(x,\ y,\ z) \in (E) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\ ; 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 y.$$

a. Pour $0 < k \leqslant 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la **question 3 c**.
C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y \geqslant \dfrac{k}{x^2}$ et $z = k$.
Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.

b. On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).
On rappelle que $V = \displaystyle\int_0^1 S(k)\,\mathrm{d}k$.

PROBLÈME **9 points**

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-2\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\ln(x+2).$$

On note $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
(unité graphique 4 cm).

I. Étude de la fonction *f*

1. Étude des variations de la dérivée f'.

a. f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

b. Étudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

c. Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.

2. Étude du signe de $f'(x)$.

a. Montrer que sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6\ ;\ -0,5]$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

3. Étude des variations de f

a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

b. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

II. Position de la courbe($\mathscr{C}_f$) par rapport à ses tangentes

Soit x_0 un réel appartenant l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse x_0.
On note, pour x appartenant à l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$,

$$d(x) = f(x) - \left[f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right].$$

1. Étude des variations de d.

a. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2~;~+\infty[$,

$$d'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

b. En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $]-2~;~+\infty[$.

2. Déterminer la position relative de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et de T_{x_0}.

III. Tracés dans le repère $\left(\mathbf{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

1. Déterminer une équation de la droite T_0, tangente $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse 0 ; tracer T_0.

2. Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par l'origine du repère puis tracer ces droites.

3. Tracer la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2. On prendra pour α la valeur $-0,54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur 0,8.

Baccalauréat série S France juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1-\text{i}$ et $c = 1+\text{i}$.

1. **a.** Placer les points A, B et C sur une figure.

   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. **a.** On appelle r la rotation de centre A telle que $r(\text{B}) = \text{C}$.
   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $\text{D} = r(\text{C})$.

   b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

   a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$ tel que $z = 1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$.

   b. Exprimer z' en fonction de θ.

   c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

   d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

EXERCICE 2 **5 points**

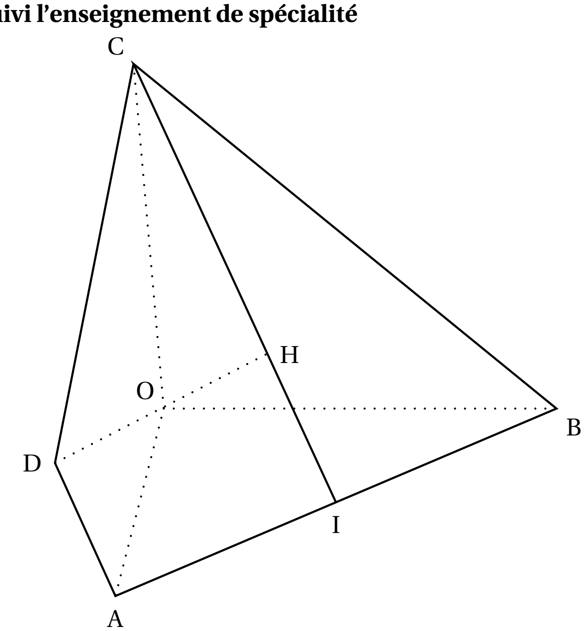
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,

• OA = OB = OC = a.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{\text{HO}} = \overrightarrow{\text{OD}}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH

a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.

b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH $= a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Étude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$.

a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$.

b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* 1. *et* 2. *seule l'équation de* Γ *donnée en* **1. c.** *intervient à la question* **4.**.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.

Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de l avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Determiner dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

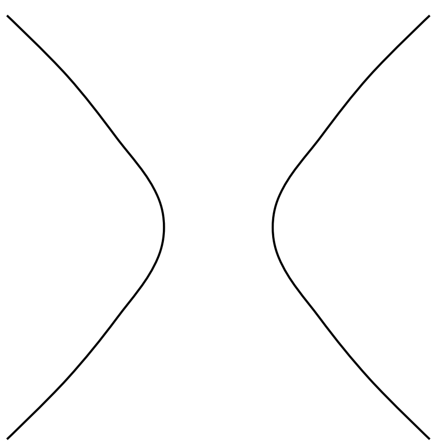


Figure 1

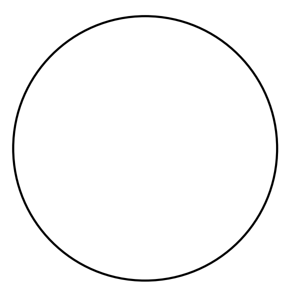


Figure 2

3. **a.** Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3 \quad [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution,

b. Montrer la propriété suivante :

pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. a. Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :

   si le point A de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

   b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$ la relation :

$$(\mathrm{E}) \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\mathrm{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

   $$(\mathrm{E}') \qquad y' + ay = \frac{a}{\mathrm{M}}.$$

   b. Résoudre (E′).

   c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E′), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{\text{M}}{1 + C\text{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \text{M}$.

b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \dfrac{\text{M}}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{\text{M}}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.

Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(0{,}5\,;\,2)$. En déduire les valeurs de N_0, T et a.

2. Sachant que $g(0) = \text{N}_0$ et que $\text{M} = 100\ \text{N}_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.

4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

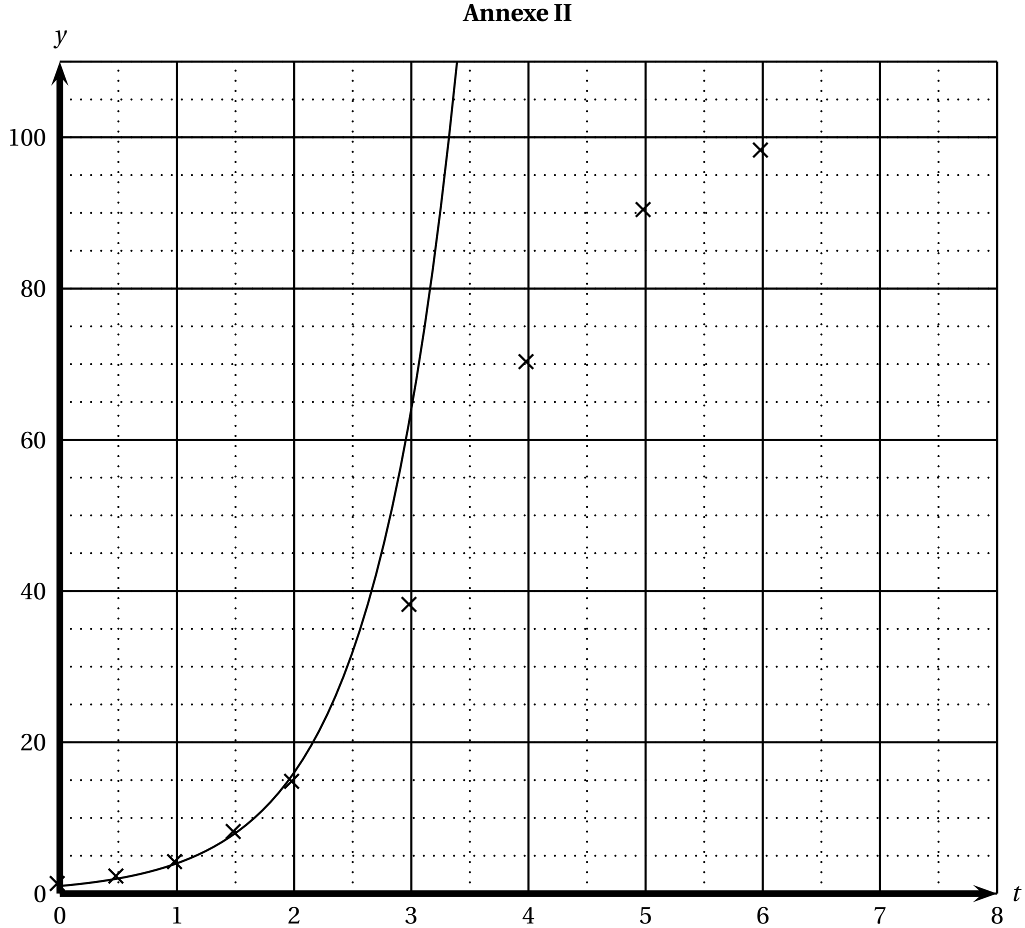
Document à rendre avec la copie

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction f, sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II



Baccalauréat La Réunion série S juin 2003

EXERCICE 1 **6 points**

Commun tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d.
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

 a. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$.

 b. $P(X = 0) = \frac{1}{2^{2n}}$

 c. $P(X < 5) = 1 - P(X > 5)$

 d. $E(X) = 0,75n$

2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée.
Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :
• Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs.
• Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).
Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.
On note M l'évènement : **l'individu est malade** et T l'évènement : **le test pratiqué est positif**.

 a. $P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = 1,01$.

 b. $P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = P(T)$

 c. $P(T) = 2,97.10^{-2}$

 d. Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.

3. La durée d'attente en seconde de la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

 a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = \mathrm{e}^{-0,01t}$

 b. Pour tout réel t positif, $P(Y \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-0,01t}$

 c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.

 d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.

2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\left\{\left(M\,;\,a^2\right),\ (\mathrm{B}\,;\,1),\ (\mathrm{D}\,;\,1)\right\}.$$

a. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{B}K}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{B}M}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

b. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{D}} = 0$.

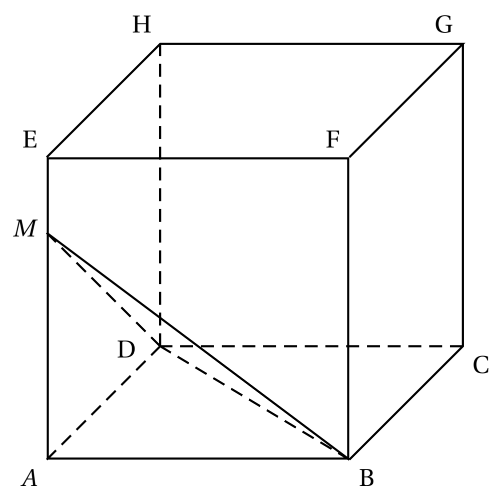
c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{D}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$.

d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{\mathrm{A}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{D}} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

4. **a.** Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm, pour unité graphique. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$.

Calculer $\Omega\mathrm{M}_0$ et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}_0}\right)$.

3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geqslant 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du poini M_n.

   a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

   b. Monter par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$z_n - \mathrm{i} = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7n\pi}{6}} (z_0 - \mathrm{i})\,.$$

   c. Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geqslant 10^2$.

4. a. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5\,;\,-3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

   b. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\mathrm{Im}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$.

Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Préciser son plus petit élément.

PROBLÈME **9 points**

Commun à tous les candidats.

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. a. Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).

   b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

   c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x.$$

   a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

   b. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_k'(x) = 0$.

3. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormaI $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

   On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$, $\mathscr{C}_{-0,15}$ et $\mathscr{C}_0$.

   En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$.

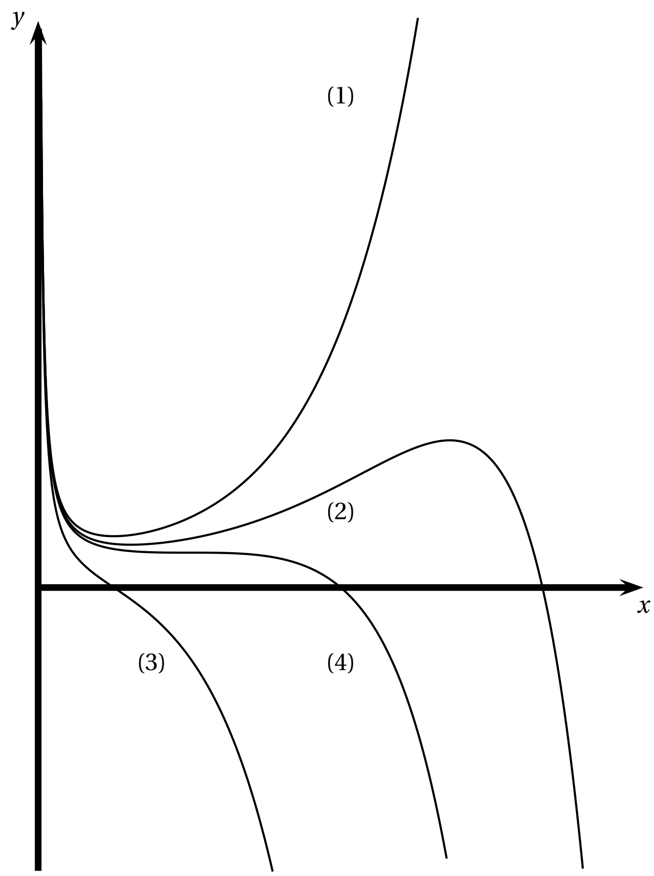
   a. Interpréter géomtriquement $\mathscr{A}(a)$.

   b. On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   En remarquant que $\mathscr{A}(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de $]0\,;\,+\infty[$ associe le réel $\mathscr{A}(a)$.

c. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes $\mathscr{C}_0$ et $(\mathrm{O}x)$ soit minimale. Comment doit-on procéder ?

Annexe du problème



Baccalauréat S Polynésie juin 2003

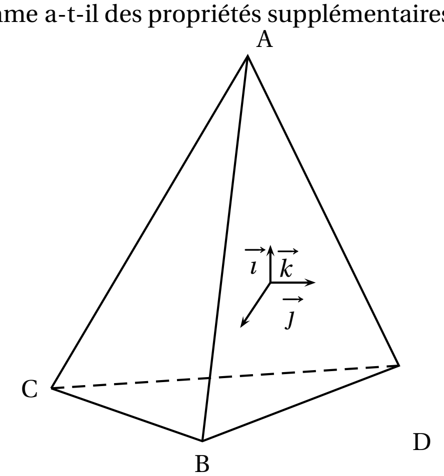
EXERCICE 1 4 points

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$\text{A}(0\,;0\,;3)$, $\text{B}(2\sqrt{2}\,;\ 0\,;\ -1)$, $\text{C}(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1)$, $\text{D}(-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{6}\,;-1)$.

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.

   Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.

   Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

EXERCICE 2 (Obligatoire) 5 points

Dans tout l'exercice, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Les constructions seront faites sur papier millimétré.

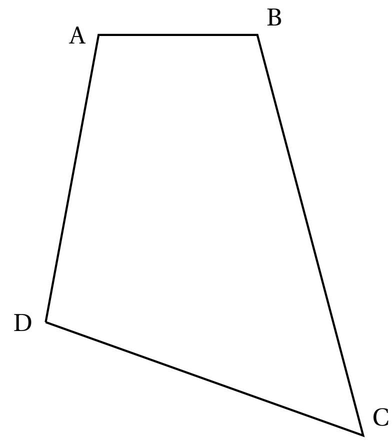
1. **a.** Le point E a pour affixe $Z_{\text{E}} = 3 + \text{i}$ et le point F a pour affixe $Z_{\text{F}} = 1 + 3\text{i}$.

   Placer dans $\mathscr{P}$ les points E et F.

b. Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{\text{HF}}\ ;\ \overrightarrow{\text{HE}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. [0,5 pt]

c. On désigne par Z_{H} l'affixe de H.
Montrer que $\left|\dfrac{3+\text{i}-Z_{\text{H}}}{1+3\text{i}-Z_{\text{H}}}\right| = 1$ et que $\arg\left(\dfrac{3+\text{i}-Z_{\text{H}}}{1+3\text{i}-Z_{\text{H}}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
En déduire que $Z_{\text{H}} = 3+3\text{i}$.

2. A, B, C et D sont quatre points du plan $\mathscr{P}$.



a. Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{\text{BIA}}$, $\widehat{\text{AJD}}$, $\widehat{\text{DKC}}$ et $\widehat{\text{CLB}}$.

b. Conjecturer la position relative des droites (IK) et (LJ) et le rapport des longueurs des segments [IK] et [LJ].

3. **a.** On désigne par a, b et z_1 les affixes respectives des points A, B et I.
Montrer que $\left|\dfrac{b-z_1}{a-z_1}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b-z_1}{a-z_1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
En déduire que $z_1 = \dfrac{\text{i}a-b}{\text{i}-1}$.

b. Avec les points B, C et L d'affixes respectives b, c et z_{L}, exprimer sans démonstration z_{L} en fonction de b et c.

c. Avec les points C, D et K d'affixes respectives c, d et z_{K}, exprimer de même z_{K} en fonction de c et d. Avec les points D, A et J d'affixes respectives d, a et z_{J} exprimer de même z_{J} en fonction de a et d.

d. Montrer que $z_{\text{L}} - z_{\text{J}} = \text{i}\,(z_{\text{K}} - z_{\text{I}})$. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendicu[aires et que JL = KI.

EXERCICE 2 (Spécialité) 5 points

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.

On donne les points A, C, D et Ω, d'affixes respectives $1+\text{i}$, 1, 3 et $2+\dfrac{1}{2}\text{i}$.

Partie A

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω passant par A.

a. Montrer que $\mathscr{C}$ passe par C et D.

b. Montrer que le segment [AD] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

c. Sur une feuille de papier millimétré, faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer $\mathscr{C}$. On note B la seconde intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite (OA) .

d. Montrer que le point O est extérieur au segment [AB].

2. Montrer par un raisonnement géométrique simple que les triangles OAD et OCB sont semblables mais non isométriques.
Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en le triangle OAD.
   a. Montrer que S est une similitude indirecte différente d'une réflexion.
   b. Quel est le centre de S ?

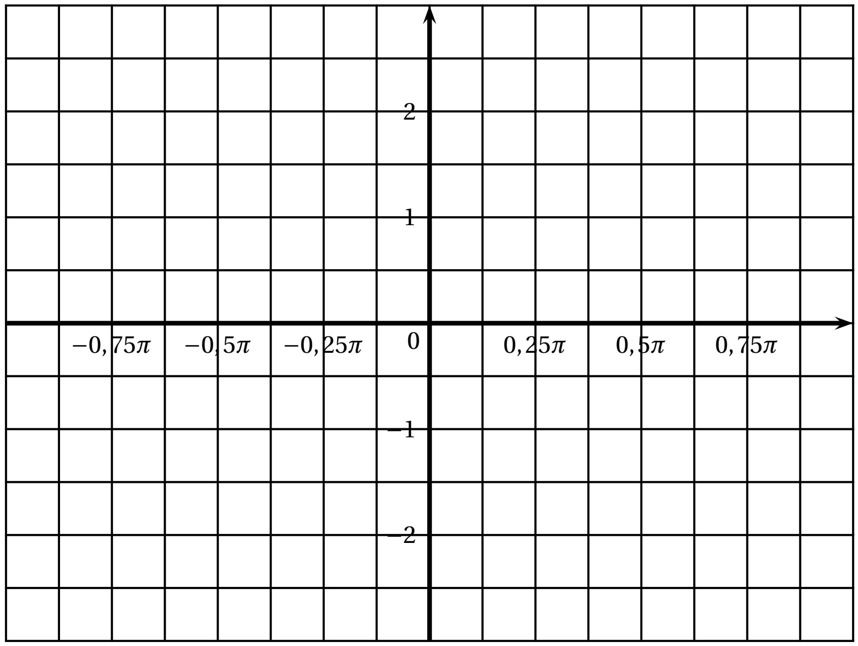
Partie B

1. **a.** Déduire de la partie **A 2** que l'on a OA × OB = OC × OD.
   b. En déduire le module de l'affixe z_B du point B. Déterminer un argument de z_B.
2. Déterminer l'écriture complexe de S.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S ∘ S.

PROBLÈME 11 points

Partie A
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos x$. On appelle $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel x,
$$-e^x \leqslant f(x) \leqslant e^x.$$
En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?
2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. On étudie f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$.
Démontrer que pour tout rel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$ on a :
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$
4. Calculer $f'(x)$, où f' dsigne la fonction dérivée de f. Montrer que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[+\frac{\pi}{4}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$. Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$. Indiquer les valeurs prises par f en $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right]$ sur le graphique ci-dessous



6. Démontrer que, sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α. Trouver, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée décimale de α arrondie au centième.

7. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2\mathrm{e}^x \sin x$.
En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,+\dfrac{\pi}{2}\right]$, le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera.
Trouver l'équation de la tangente T $\mathscr{C}_f$ en 0 et tracer T sur le graphique de la question 5.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.

2. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{\pi} - 1}{1 + n^2}.$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel $|I_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{1 + n^2}$. En dduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C

On considère les équations différentielles

$$\text{(E)} \qquad y' - 2y - 1 = 0$$

$$\text{(E}'\text{)} \qquad y' - 2y = 1 - \mathrm{e}^x \sin x$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dire, en le justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. (E) admet une fonction polynôme du premier degré comme solution.

2. Soit g une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$; si g est solution de (E) alors elle est croissante sur D.

3. La fonction $x \longmapsto 3\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{2}$ est une solution de (E).

4. La primitive F de f qui s'annule en 0 est une solution de (E$'$).