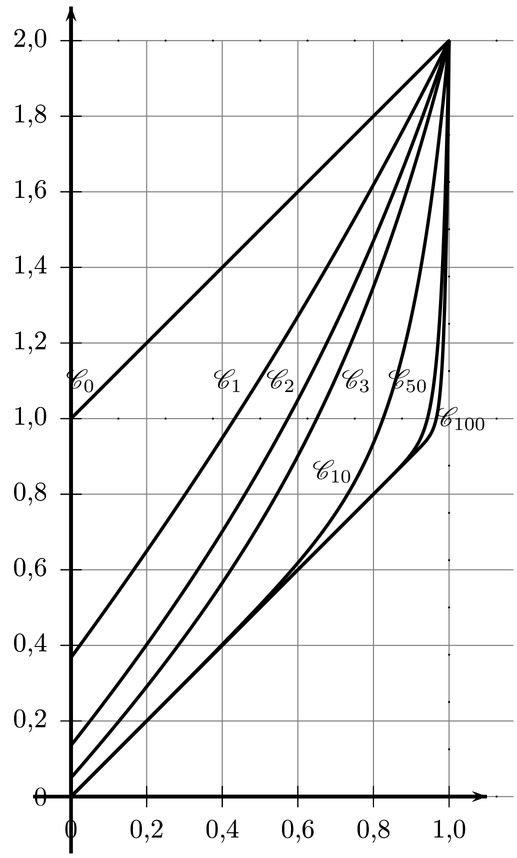
Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (6 points) (commun à tous les candidats)

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0, 1]$.

2) Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.

3) A l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?
Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1) Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

2) Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

A partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

Asie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Pour tout x de $[0,1]$, $x \geqslant 0$ et $e^{n(x-1)} \geqslant 0$ puis pour tout x de $[0,1]$, $x + e^{n(x-1)} \geqslant 0$. Donc, la fonction f_n est positive sur $[0,1]$.

• La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout x de $[0,1]$,

$$f_n'(x) = 1 + ne^{n(x-1)}.$$

Pour tout x de $[0,1]$, $ne^{n(x-1)} \geqslant 0$ puis $1 + ne^{n(x-1)} \geqslant 0$. La fonction f_n' est positive sur $[0,1]$ et donc la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$.

2) Pour tout entier naturel n, $f_n(1) = 1 + e^0 = 2$. Donc, le point $A(1,2)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.

3) Il semble que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ tende vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Démontrons ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ est

$$f_n'\left(x_A\right) = f_n'(1) = 1 + ne^0 = n + 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$, le résultat est démontré.

Partie B

1) Pour tout entier naturel n, $u_n = f_n(1) = 2$. Dans le cas où $x = 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et en particulier convergente, de limite 2.

2) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout entier naturel n, $e^{n(x-1)} = \left(e^{x-1}\right)^n$. La suite $\left(\left(e^{x-1}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{x-1}$. Puisque $x < 1$, on a $x - 1 < 0$ puis $0 < e^{x-1} < 1$ et en particulier $-1 < q < 1$. On sait alors que

$$\lim_{n \to +\infty} e^{n(x-1)} = \lim_{n \to +\infty} q^n = 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = x + 0 = x$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } [0,1[,\ \lim_{n \to +\infty} u_n = x.}$$

Partie C

Il semble que, quand n tend vers $+\infty$, A_n tende vers l'aire du triangle dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ ou encore il semble que, quand n tend vers $+\infty$, A_n tende vers $\dfrac{1}{2}$. Démontrons ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$. Donc,

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \left(x + e^{n(x-1)}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{n}e^{n(x-1)}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}e^0\right) - \left(0 + \frac{1}{n}e^{-n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-n}}{n}. \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 - e^{-n}\right) = 1 - 0 = 1$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$. En divisant, on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n} = 0$ et finalement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{1}{2}.}$$

