PUBLICATION N° 86 DU GROUPE INTER-IREM "LYCEES TECHNIQUES"

RECUEIL DE SUJETS AVEC CORRIGES

DE BTS DE LA FILIERE

MECANIQUE

DES SESSIONS DE 1996 et 1997

Université PARIS NORD

IREM - CSP

Avenue J.B. Clément
94430 VILLETANEUSE

UNIVERSITE PARIS-NORD - IREM

RECUEIL DE SUJETS AVEC CORRIGES DE BTS
DE LA FILIERE MECANIQUE
DES SESSIONS DE 1996 et 1997

Geneviève SAINT-PIERRE
Bernard VERLANT

ISBN

1997

500 ex
45 F

AVANT PROPOS

Cette brochure regroupe des exercices ou problèmes posés à des épreuves de BTS de la filière MECANIQUE des sessions 1996 et 1997 .
Certains des textes ont été modifiés pour améliorer la progressivité.

En page 6 figure le tableau de correspondance entre les modules de programmes et les programmes de certains BTS de la filière MECANIQUE .

On peut se reporter à ces modules pour obtenir la liste des travaux pratiques qui sont le champ des problèmes de l'examen.

Les formulaires officiels qui sont distribués avec les épreuves figurent à partir de la page 74.

SOMMAIRE

VADEMECUM DES TEXTES DE PROGRAMMES DANS LES SECTIONS DE TECHNICIENS SUPERIEURS EN MATHEMATIQUES OCTOBRE 1991

sections de techniciens supérieurs	textes réglementaires		date d'effet		
	Arrêté	B. O	T.S.1	B.T.S	Formulaire B.O
En assistance technique d'ingénieur	04.06.1984 25.03.1993		1993	1995	09.12.1993
Conception de produits industriels	30.07.1986 11.08.1987 02.09.1991	02.10.1986 10.12.1987 19.09.1991	1986 1991	1988 1993	21.01.1988 + additif 09.11.1989
Maintenance	30.07.1986 16.07.1987 02.09.1991	09.10.1986 25.02.1988 19.09.1991	1986 1991	1988 1993	21.01.1988
Mécanique et automatismes industriels	17.07.1984 02.09.1991	03.01.1985 07.03.1985 19.09.1991	1984 1991	1986 1993	21.01.1988
Microtechniques	30.07.1986 17.07.1987 07.03.1988 08.03.1991 02.09.1991	02.10.1986 10.12.1987 26.05.1988 09.05.1991 19.09.1991	1986 1991	1988 1993	21.01.1988
Productique	30.07.1986 16.07.1987 02.09.1991	09.10.1986 17.12.1987 19.09.1991	1986 1991	1988 1993	21.01.1988

MODULES CHOISIS POUR LES SECTIONS DE TECHNICIENS SUPERIEURS MÉCANIQUE-AUTOMATIQUE :

	Conception de produits industriels	Maintenance	Mécanique et automatismes	Microtechnique	Productique
Nombres complexes	2	2	2	2	2
Suites et séries numériques	2				
Fonctions d'une variable réelle	2	1	1	1	1
Calcul différentiel et intégral	3	2	2	2	2
Analyse spectrale: séries de Fourier	1				
Analyse spectrale: transformation de Laplace					
Équations différentielles	1	1	1	1	1
Fonctions de deux ou trois variables	1		1	1	1
Analyse des phénomènes exponentiels					
Modélisation géométrique					
Algèbre linéaire		1	1		
Organisation et traitement des données			1	1	
Statistique descriptive	1	1	1	1	1
Calcul des probabilités	1	2	2	2	2
Statistique inférentielle	2	3	2	2	2
Calcul vectoriel	1		1	1	1
Configurations géométriques	1				1
Courbes planes	1		1	1	1

INDEX THEMATIQUE

MAINTENANCE

MAINTENANCE

1996

EXERCICE 1 (8 points)

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

I. Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle : (E) $(1 + t^2)\,x' + 2t\,x = 0$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et où x ' est la fonction dérivée de x.

1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

2° Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E), vérifiant $f(0) = 1$.

II Calcul intégral

On pose : $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$ et $C = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$.

1° a) Montrer que $A = \frac{\pi}{4}$

b) Montrer que $B = \frac{1}{2}\ln 2$.

2° a) Vérifier que, pour tout nombre réel t, on a : $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$.

b) Déduire du 1° la valeur exacte de C.

III . Application

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur [0, 1] par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Une plaque homogène est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations t = 0 et t = 1.

Le moment d'inertie de cette plaque par rapport à la droite d'équation t = 1 est donné par :

$$M = \int_0^1 (1-t)^2 f(t)\,dt.$$

1° Montrer que $M = A - 2B + C$.

2° A l'aide de la partie II, calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près de M.
(Le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ n'est pas demandé).

EXERCICE 2 (12 points)

Les questions I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Un groupe industriel possède deux filiales MAT et MATIC qui produisent des petits moteurs destinés au montage de jouets.

I . La variable aléatoire X qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie exprimée en heures suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.

1° Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures. Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité p qu'un moteur prélevé au hasard dans la production ne soit pas commercialisable.

2° On admet que p = 0,02. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nombre de moteurs non commercialisables. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise.

a) Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse et donner ses paramètres. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement :" il y a exactement deux moteurs non commercialisables ".

b) On admet que la loi précédente peut être approchée par une loi de Poisson. Préciser son paramètre. Calculer à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement : " il y a au plus trois moteurs non commercialisables "

II. La filiale MAT prélève un échantillon de taille 100 sur la production d'un jour et mesure la durée de vie, en heures, des moteurs. Les résultats obtenus sont les suivants :

Durée de vie	[300, 340[	[340, 380[	[380, 420[	[420, 460[	[460, 500[
Effectifs	7	21	48	16	8

1° En faisant l'hypothèse que les valeurs mesurées sont celles du centre de classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne m_1 et l'écart type σ_1 de cette série statistique.

La filiale MATIC, dans des conditions similaires, contrôle un échantillon de taille 100 et obtient pour résultats $m_2 = 406{,}8$ et $\sigma_2 = 40{,}5$.

2° On désigne par $\overline{X_1}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MAT, associe sa moyenne et par $\overline{X_2}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MATIC, associe sa moyenne .

Tous les échantillons considérés sont assimilés à des échantillons prélevés avec remise.

On suppose que les variables aléatoires $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $D = \overline{X_1} - \overline{X_2}$ suivent des lois normales de moyennes respectives M_1, M_2, $M_1 - M_2$ inconnues et on estime l'écart type de D par $\sigma_D = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{100}}$. (On prend comme valeur approchée à 10^{-1} près de σ_1 la valeur 39,4).

On décide de construire un test bilatéral permettant de savoir s'il existe une différence significative au seuil de 5 % entre les durées de vie des moteurs fabriqués par les filiales MAT et MATIC.

On choisit pour hypothèse H_0 : $M_1 = M_2$, et pour hypothèse alternative H_1 : $M_1 \neq M_2$.

a) Sous l'hypothèse H_0 , D suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_D)$. Déterminer l'intervalle [– h, h] tel que, $P(-h \leq D \leq h) = 0{,}95$.

b) Enoncer la règle de décision du test.

c) Utiliser ce test avec les deux échantillons de l'énoncé et conclure.

EXERCICE 1

I - 1° (E) $(1 + t^2)\, x' + 2t\, x = 0$.

On sait que la solution générale de l'équation

$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ est définie par : $x(t) = Ce^{-F(t)}$, où C est un nombre réel quelconque et F est une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $t \to \frac{b(t)}{a(t)}$.

Une primitive F de la fonction : $t \to \frac{2t}{1 + t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \ln(1 + t^2)$.

Donc la solution générale x de l'équation différentielle (E) est telle que : $x(t) = C\, e^{-\ln(1 + t^2)}$, $x(t) = \frac{C}{1 + t^2}$ où C est un nombre réel quelconque.

2° On cherche la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 1$. $f(0) = 1$ équivaut à $C = 1$; la solution particulière f de (E) est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{1 + t^2}$.

II . 1) $A = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$, $A = [\,\text{Arctan}\, x\,]_0^1$, $A = \frac{\pi}{4}$.

$B = \int_0^1 \frac{t}{t^2 + 1}\, dt$, $B = \frac{1}{2}[\ln(1 + t^2)]_0^1$, $\boldsymbol{B = \frac{1}{2} \ln 2}$.

2) $C = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt$,

$C = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$, $C = 1 - A$, $\boldsymbol{C = 1 - \frac{\pi}{4}}$.

III . $M = \int_0^1 (1 - 2t + t^2)\frac{1}{t^2 + 1}\, dt$,

$M = A - 2B + C$, $M = 1 - \ln 2$,

M = 0,307 à 10^{-3} près.

EXERCICE 2

I . 1° La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(400, 40)$. La variable aléatoire $T = \frac{X - 400}{40}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$p = P(X \leq 318) = P(T \leq -2{,}05)$, $p = 1 - \pi(2{,}05)$,

$p \approx 1 - 0{,}9798$, **p ≈ 0,0202 à 10^{-4} près .**

2° a) Les prélèvements aléatoires sont supposés avec remise. On est donc en présence d'une succession de 50 épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues : moteur non commercialisable de probabilité constante 0,02 ou moteur commercialisable de probabilité 0,98.

Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50 ; 0{,}02)$.

$P(Y = 2) = C_{50}^2 (0{,}02)^2 (0{,}98)^{48}$,

P(Y) = 0,186 à 10^{-3} près.

b) $\lambda = np = 50 \times 0{,}02$, $\lambda = 1$,

Y suit la loi $\mathcal{P}(1)$, **P(Y ≤ 3) ≈ 0,981.**

$P(Y \leq 3) = 0{,}981$ à 10^{-3} près ; (calculable par la loi binomiale ou la loi de Poisson) .

II. 1° A l'aide de la calculatrice on trouve :

$m_1 = 398{,}8$ et $\sigma_1 \approx 39{,}38$

2°Choix de H_0 : $M_1 = M_2$ ou $M_1 - M_2 = 0$.

Choix de H_1 : $M_1 \neq M_2$.

$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{100}} \approx 5{,}65$

a) Sous l'hypothèse H_0, D suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 5{,}65)$.

La variable centrée réduite $T = \frac{D}{5{,}65}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(-h \leq D \leq h) = 0{,}95$ donne

$P\left(\frac{-h}{5{,}65} \leq T \leq \frac{h}{5{,}65}\right) = 0{,}95$.

La table donne $\frac{h}{5{,}65} = 1{,}96$, d'où **h ≈ 11,07** et

P(- 11,07 ≤ D ≤ 11,07) = 0,95.

b) Règle de décision :

On prélève deux échantillons aléatoires non exhaustifs de taille 100 dans les productions de MAT et MATIC et on calcule leurs moyennes m_1 et m_2 .

Si $m_1 - m_2 \in [-11{,}07 ; 11{,}07]$ on accepte H_0 et on rejette H_1

Si $m_1 - m_2 \notin [-11{,}07 ; 11{,}07]$ on accepte H_1 et on rejette H_0 .

c) **Utilisation du test :**

$m_1 - m_2 = -8$

$-8 \in [-11{,}07 ; 11{,}07]$, on accepte H_0

On conclut, au seuil de signification 5%, qu'il n'y a pas de différence significative entre les productions des deux filiales.

MAINTENANCE Nouvelle Calédonie

1996

EXERCICE 1 (10 points)

1) Calcul d'intégrales

Calculer en fonction du nombre réel positif t, les intégrales suivantes :

a) $F(t) = \frac{1}{200} \int_0^t e^{-0,005\,x}\,dx$;

b) $J(t) = \frac{1}{200} \int_0^t x\,e^{-0,005\,x}\,dx$;

c) $K(t) = \frac{1}{200} \int_0^t x^2\,e^{-0,005\,x}\,dx$.

(On pourra utiliser des intégrations par parties pour calculer J(t) et K(t)).

2) Interprétation en probabilités

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x < 0, \\ f(x) = \frac{1}{200} e^{-0,005\,x} & \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$

a) Calculer $I = \lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$ où F est définie au 1°.

On admet que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire T .

b) Calculer l'espérance mathématique $E(T) = \lim\limits_{t \to +\infty} J(t)$ de la variable aléatoire T.

c) Calculer l'espérance mathémathique $E(T^2) = \lim\limits_{t \to +\infty} K(t)$ de la variable T^2.

En déduire la variance $V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2$ et l'écart type de la variable aléatoire T.

3) Loi exponentielle

a) Montrer que la fonction de fiabilité associée à variable aléatoire T est définie sur [0, +∞[par $R(t) = e^{-0,005\,t}$.

b) Calculer à 10^{-3} près : $P(T > 300)$, $P(T \leq 100)$ et $P(100 < T \leq 300)$.

c) Calculer la valeurs entière approchée de t_0 telle que $P(T \leq t_0) = 0,1$.

EXERCICE 2 (10 points)

Les deux parties A et B sont indépendantes.
Les trois questions de la partie A peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

A) Une machine fabrique des billes en grande série. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre exprimé en cm.
On admet que X suit la loi normale de moyenne $m = 1{,}10$ cm et d'écart type $\sigma = 0{,}05$ cm

1) Une bille est considérée comme bonne si son diamètre est compris entre 1 cm et 1,22 cm. Calculer à 10^{-3} près la probabilité de l'événement : "une bille prélevée au hasard dans la production est bonne".

On admet maintenant que 97 % de ces billes sont bonnes .

2) On met les billes en sachets de 10. On assimile ces échantillons à des échantillons de 10 billes prélevées au hasard et avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout sachet de 10 billes, associe le nombre de billes défectueuses qu'il contient.
   a) Quelle est la loi suivie par cette variable aléatoire Y. Justifier la réponse.
   b) Calculer à 10^{-4} près la probabilité qu'un tel sachet ne contienne aucune bille défectueuse.

3) On introduit dans la fabrication un appareil chargé d'éliminer les 3 % de billes défectueuses.
On tire au hasard une bille dans la production.
On note : D l'événement " la bille est défectueuse "
R l'événement " la bille est refusée ".
Le mécanisme est tel que :
une bille est refusée sachant qu'elle est défectueuse avec la probabilité 0,99.
une bille est acceptée sachant qu'elle est bonne avec la probabilité 0,99.
On connaît donc : $P(D) = 0{,}03$, $P(R/D) = 0{,}99$, $P(\overline{R}/\overline{D}) = 0{,}99$.
   a) Déterminer $P(R \cap D)$, $P(R/\overline{D})$, $P(R \cap \overline{D})$ et $P(R)$.
   b) Calculer la probabilité qu'une bille soit bonne sachant qu'elle a été refusée.
Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

B) L'augmentation des diamètres est due à l'usure d'un outil. Afin de déterminer la fréquence des réglages, chaque fois que cent billes sont fabriquées on mesure le diamètre de la centième. Les billes dont le rang de fabrication est 100, 200, 300,.... sont ainsi contrôlées. Voici les résultats :

Rang x_i de la bille :	100	200	300	400	500
Diamètre y_i de la bille :	1,018	1,044	1,059	1,079	1,101

1) Déterminer à 10^{-4} près le coefficient de corrélation de cette série statistique ainsi qu'une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

2) On admet que la tendance observée se poursuit. Estimer le diamètre de la 600^e et de la 700^e bille.

EXERCICE 1

1° a) $F(t) = \int_0^t 0{,}005\, e^{-0{,}005\,x}\, dx$,

$F(t) = \left[e^{-0{,}005\,x}\right]_0^t$ $F(t) = 1 - e^{-0{,}005\,t}$.

b) $J(t) = \int_0^t 0{,}005\, x\, e^{-0{,}005\,x}\, dx$.

On intègre par parties en posant :

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = 0{,}005\, e^{-0{,}005\,x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-0{,}005\,x} \end{cases}$.

$J(t) = \left[-x\, e^{-0{,}005\,x}\right]_0^t + 200\, F(t)$,

$J(t) = -t\, e^{-0{,}005\,t} - 200\, e^{-0{,}005\,t} + 200$.

c) $K(t) = \int_0^t 0{,}005\, x^2\, e^{-0{,}005\,x}\, dx$.

On intègre par parties en posant :

$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = 0{,}005\, e^{-0{,}005\,x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-0{,}005\,x} \end{cases}$,

$K(t) = \left[-x^2\, e^{-0{,}005\,x}\right]_0^t + 400\, J(t)$,

$K(t) = -t^2 e^{-0{,}005\,t} - 400\, t\, e^{-0{,}005t} + 80000\, e^{-0{,}005\,t} + 80000$.

2° $I = \lim\limits_{t \to +\infty} 1 - e^{-0{,}005\,t}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}005\,t} = 0$, $I = 1$.

$E(T) = \lim\limits_{t \to +\infty} (-t\, e^{-0{,}005\,t} - 2e^{-0{,}005\,t} + 200)$, $E(T) = 200$.

$E(T^2) = \lim\limits_{t \to +\infty} (-t^2 e^{-0{,}005\,t} - 400\, t\, e^{-0{,}005\,t} + 80000\, e^{-0{,}005\,t} + 80000)$, $K = 80000$.

$V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = K - 200^2$, $V(T) = 40000$,

$\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = 200$.

3° a) En fiabilité F est la fonction de défaillance, R définie sur $[0, +\infty[$ par $R(t) = 1 - F(t)$ est la fonction de fiabilité. D'après ce qui précède $F(t) = 1 - e^{-0{,}005\,t}$ donc $R(t) = e^{-0{,}005\,t}$, la variable aléatoire T suit donc une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$.

b) $P(T > 300) = R(300) = e^{-0{,}005 \times 300}$,

$P(T > 300) = e^{-1{,}5}$, $P(T > 300) = 0{,}223$ à 10^{-3} près.

$P(T \leq 100) = 1 - e^{-0{,}005 \times 100}$, $P(T \leq 100) = 1 - e^{-0{,}5}$,

$P(T \leq 100) = 0{,}393$ à 10^{-3} près.

$P(100 < T \leq 300) = F(300) - F(100)$,

$P(100 < T \leq 300) = 1 - 0{,}616 = 0{,}384$ à 10^{-3} près.

c) $P(T \leq t_0) = 0{,}1$ équivaut à $F(t_0) = 0{,}1$ et à $R(t_0) = 0{,}9$ et à $e^{-0{,}005\,t_0} = 0{,}9$ d'où :

$-0{,}005\, t_0 = \ln 0{,}9$, $t_0 = -200 \ln 0{,}9$, $t_0 \approx 21$.

EXERCICE 2

A) 1) X suit la loi normale $\mathcal{N}(1{,}1\,;\,0{,}05)$. La variable aléatoire centrée réduite $T = \dfrac{X - 1{,}1}{0{,}05}$ suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.

$P(1 \leq X \leq 1{,}22) = P(\dfrac{-0{,}1}{0{,}05} \leq T \leq \dfrac{0{,}12}{0{,}05})$,

$P(1 \leq X \leq 1{,}22) = P(-2 \leq T \leq 2{,}4)$

$P(1 \leq X \leq 1{,}22) = \pi(2) + \pi(2{,}4) - 1$,

$P(1 \leq X \leq 1{,}22) = 0{,}9775 + 0{,}9918 - 1$

$P(1 \leq X \leq 1{,}22) = 0{,}969$.

2) a) Le tirage de 10 billes est assimilé à un tirage aléatoire non exhaustif donc assimilé à 10 épreuves indépendantes, chacune débouchant sur deux éventualités : la bille tirée est défectueuse de probabilité 0,03 ou la bille est bonne de probabilité 0,97.

La variable aléatoire Y qui, à tout sachet de 10 billes, associe le nombre de billes défectueuses qu'il contient, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}$ (10 ; 0,03).

b) La probabilité qu'un tel sachet ne contienne aucune bille défectueuse s'obtient en calculant :

$P(Y = 0) = C_{10}^0\, (0{,}03)^0 (0{,}97)^{10}$,

$P(Y = 0) = 0{,}7374$ à 10^{-4} près .

3) On note : D l'événement : " une bille est défectueuse "
R l'événement " une bille est refusée ". On connaît donc

$P(D) = 0{,}03$, $P(R/D) = 0{,}99$, $P(\overline{R}/\overline{D}) = 0{,}99$.

a) $P(R \cap D) = P(D) \times P(R/D) = 0{,}03 \times 0{,}99$,

$P(R \cap D) = 0{,}0297$.

$P(R/\overline{D}) = 1 - P(\overline{R}/\overline{D}) = 0{,}01$,

$P(R \cap \overline{D}) = P(\overline{D}) \times P(R/\overline{D}) = 0{,}97 \times 0{,}01$,

$P(R \cap \overline{D}) = 0{,}0097$, les événements $R \cap D$ et $R \cap \overline{D}$ étant incompatibles :

$P(R) = P(R \cap D) + P(R \cap \overline{D})$, $P(R) = 0{,}0394$.

La probabilité qu'une bille soit bonne sachant qu'elle a été refusée s'obtient en calculant : $P(\overline{D}/R) = \dfrac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)}$,

$P(\overline{D}/R) = \dfrac{0{,}0097}{0{,}0394}$, $P(\overline{D}/R) = 0{,}246$ à 10^{-3} près.

B) 1) Avec une calculatrice, on obtient à 10^{-4} près : $r = 0{,}9972$, le résultat obtenu est voisin de 1. Avec une calculatrice, on obtient l'équation : $y = 0{,}0002\,x + 0{,}9999$ qui peut s'écrire avec les valeurs approchées à 10^{-4} près $y = 0{,}0002\,x + 1$.

2) Avec cette dernière équation on obtient pour $x = 600$ billes $y = 1{,}12$.

On obtient pour $x = 700$ billes $y = 1{,}14$.

MAINTENANCE

1997

EXERCICE 1 (9 points)

La variation du paramètre de forme β permet d'ajuster une grande quantité de distributions expérimentales à une loi de Weibull. On désigne par f_β la fonction de densité et par F_β la fonction de défaillance de la variable aléatoire T suivant une telle loi.

On désigne par C_β la courbe représentative de f_β dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les unités graphiques étant de 5 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées.

Dans cet exercice on considère les deux cas $\beta = 1$ et $\beta = 2$ lorsque les deux autres paramètres de la loi de Weibull sont $\eta = 1$ et $\gamma = 0$.

1° **Etude du cas $\beta = 1$:**

On rappelle que la fonction f_1 et la fonction F_1 sont alors définies sur $[\,0, +\infty\,[$ par :

$$f_1(t) = e^{-t} \qquad \text{et} \qquad F_1(t) = \int_0^t f_1(x)\,dx.$$

a) Construire la courbe C_1 dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On ne demande pas l'étude de la fonction f_1.

b) Calculer, en fonction de t, l'intégrale $F_1(t)$ et en déduire la probabilité $P(T \leq 1)$ à 10^{-3} près.

c) Calculer $I(t) = \displaystyle\int_0^t x\, f_1(x)\,dx$. (On pourra effectuer une intégration par parties).

Déterminer l'espérance mathématique $E(T) = \lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$.

2° **Etude du cas $\beta = 2$:**

On rappelle que la fonction f_2 et la fonction F_2 sont alors définies sur $[\,0, +\infty\,[$ par :

$$f_2(t) = 2t\,e^{-t^2} \qquad \text{et} \qquad F_2(t) = \int_0^t f_2(x)\,dx.$$

a) On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} f_2(t) = 0$. Etudier le sens de variation de f_2.

b) En posant $u = -t^2$ et en utilisant le développement limité à l'ordre 1 de e^u au voisinage de 0, démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de f_2 au voisinage de 0 est défini par :

$f_2(t) = 2t - 2t^3 + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$. En déduire une équation de la tangente D à C_2 au point d'abscisse 0, et la position relative de D et de C_2 au voisinage de ce point.

c) Construire la tangente D et la courbe C_2 dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ utilisé au 1°.

d) Démontrer que $F_2(t) = 1 - e^{-t^2}$ et en déduire la valeur de t telle que $P(T \leq t) = 0{,}05$.

EXERCICE 2 (11 points)

Un tour à commande numérique fabrique en grande série des cylindres.

Dans un premier temps le service de maintenance décide d'établir une carte de contrôle qui permette de décider du moment où il est nécessaire de régler le tour.

Dans un deuxième temps le service de maintenance décide d'utiliser cette carte de contrôle pour relever les temps écoulés entre deux réglages successifs du tour et obtenir ainsi un fichier historique permettant de déterminer une périodicité de réglage systématique basée sur une fiabilité de 90 % .

A) **Première partie** : Définition de la carte de contrôle.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque cylindre prélevé au hasard dans la production, associe son diamètre.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $m = 40$ mm et d'écart type $\sigma = 0{,}045$ mm.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 5 cylindres prélevés au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres de cet échantillon.

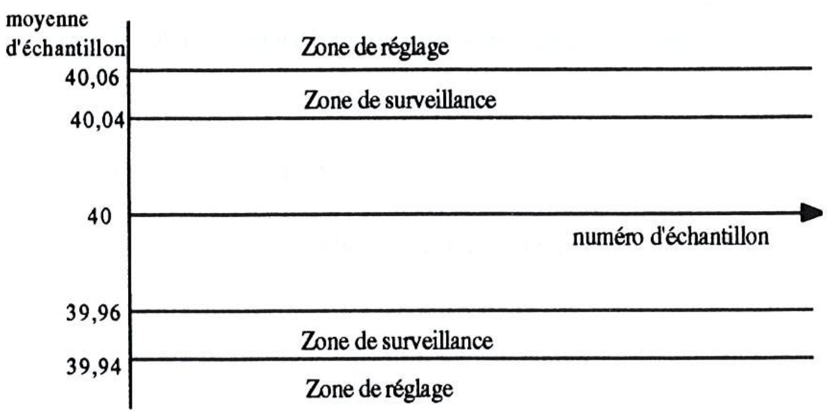
1° Justifier que la variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne $E(\overline{X}) = 40$ mm et d'écart type $\sigma' = 0{,}020$ mm à 10^{-3} près.

2° Calculer, à 10^{-2} près, les probabilités :

$p_1 = P(m - 2\sigma' \leq \overline{X} \leq m + 2\sigma')$; $p_2 = P(m - 3\sigma' \leq \overline{X} \leq m + 3\sigma')$; $p_3 = P(\overline{X} \leq 39{,}95)$.

3° Sur la carte de contrôle représentée ci-dessous sont placées les zones de surveillance et de réglage : la zone de surveillance correspond aux moyennes d'échantillons comprises entre 39,94 et 39,96 ou entre 40,04 et 40,06 ; la zone de réglage correspond aux moyennes d'échantillons inférieures à 39,94 ou supérieures à 40,06.

Quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité p_4 qu'un échantillon de 5 cylindres prélevés au hasard et avec remise ait sa moyenne placée dans la zone de surveillance.



B) **Deuxième partie :** Détermination de la périodicité de réglage systématique .

L'équipe de maintenance a relevé pendant plusieurs mois les temps de fonctionnement, en heures, entre deux réglages consécutifs du tour et a établi le tableau suivant :

t_i (en heures)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F(t_i)$ (en %)	10	15	23	30	40	50	63	74	84	92	95

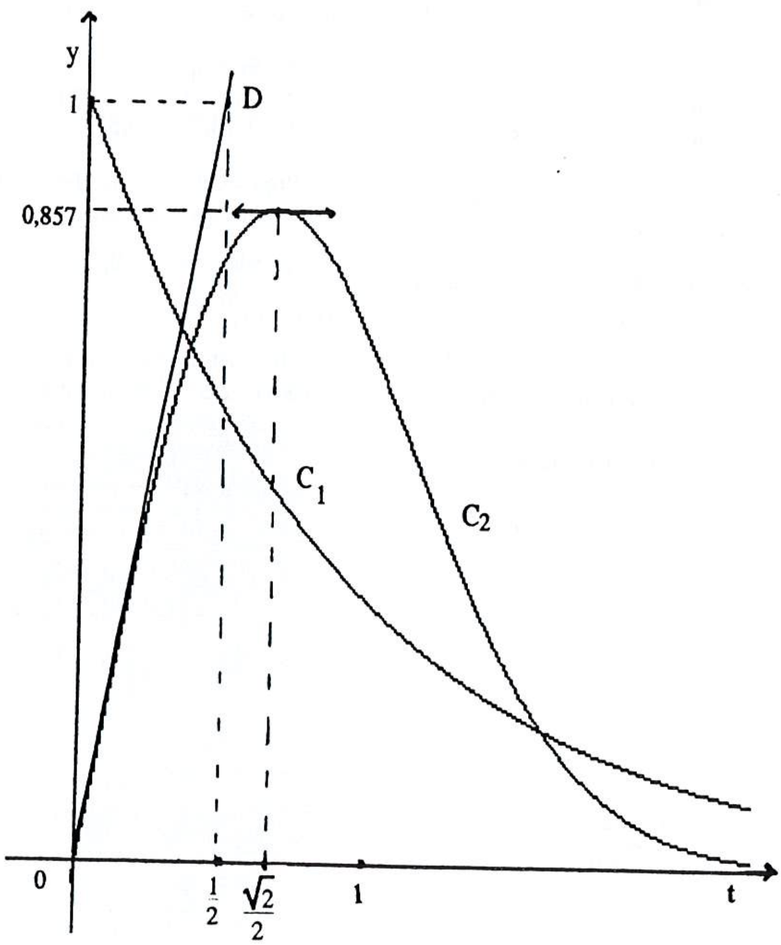
où t_i représente le temps de fonctionnement entre deux réglages consécutifs et $F(t_i)$ le pourcentage cumulé de réglages effectués avant le temps t_i.

1° Placer les points de coordonnées (t_i, $F(t_i)$) sur le papier de Weibull fourni en annexe .
Expliquer pourquoi cette distribution peut être ajustée par une loi de Weibull dont on déterminera les paramètres. Donner l'expression de R(t).

2° Calculer la MTBF et la probabilité de ne pas avoir de réglage à faire avant cette MTBF.

3° Déterminer **graphiquement** et par **le calcul** la périodicité de réglage systématique basée sur une fiabilité de 90 % .

Corrigé **Maintenance 97**



EXERCICE 1

1° $f_1(t) = e^{-t}$ a) Voir graphique.

b) $F_1(t) = \int_0^t f_1(x).dx$, $F_1(t) = \int_0^t e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^t$,

$\mathbf{F_1(t) = 1 - e^{-t}}$.

$P(T \leq 1) = 1 - e^{-1}$, $\mathbf{P(T\leq 1) = 0{,}632}$ **à 10^{-3}** près.

c) $I(t) = \int_0^t x.f_1(x).dx = \int_0^t x.e^{-x}\,dx$, en posant $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-x}$ on a $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$,

on obtient : $I(t) = [-x e^{-x}]_0^t - \int_0^t -e^{-x}\,dx$,

$I(t) = -t e^{-t} - [e^{-x}]_0^t$, $I(t) = -t e^{-t} - e^{-t} + 1$,

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t e^{-t} = 0$,

$\mathbf{E(T) = \lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = 1}$.

2° a) $f_2(t) = 2 t e^{-t^2}$, $f_2'(t) = 2 e^{-t^2} - 4 t^2 e^{-t^2}$,

$f_2'(t) = 2 e^{-t^2}(1 - 2t^2)$, $f_2'(t)$ est du signe de $1 - 2t^2$,

f_2 définie sur $[0 ; +\infty[$, $f_2'(t) = 0$ pour $t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}\, e^{-1/2} \approx 0{,}857$.

t	0		t_0		$+\infty$
$f_2'(t)$		$+$	0	$-$	
$f_2(t)$	0	$\nearrow$	$f(t_0)$	$\searrow$	0

b) Le développement limité de e^u à l'ordre 1, au voisinage de 0 est : $e^u = 1 + u + u\,\varepsilon_1(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_1(u)$

le développement limité à l'ordre 2 de e^{-t^2} est : $1 - t^2 + t^2\,\varepsilon_2(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_2(t) = 0$,

le développement limité à l'ordre 3 de $f_2(t)$ au voisinage de 0 est : $f_2(t) = 2t\,(1 - t^2) + t^3\,\varepsilon_3(t)$,

$f_2(t) = 2t - 2t^3 + t^3\,\varepsilon_3(t)$ avec : $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_3(t) = 0$.

On en déduit que l'équation de la tangente D à C_2 au point d'abscisse nulle est **$y = 2\,t$.**

La position de C_2 par rapport à D, au voisinage de O, dépend du signe de : $f_2(t) - 2t = -2t^3 + t^3\,\varepsilon_3(t)$ qui est du signe contraire de t, donc C_2 est au dessous de D au voisinage de l'origine.

c) Voir graphique.

d) $F_2(t) = \int_0^t f_2(x).dx$, $F_2(t) = \int_0^t 2\,x\,e^{-x^2}\,dx$,

$(e^{-x^2})' = -2\,x\,e^{-x^2}$ donc $F_2(t) = [-e^{-x^2}]_0^t$,

$F_2(t) = -e^{-t^2} + 1$, $\mathbf{F_2(t) = 1 - e^{-t^2}}$.

$P(T \leq t) = 0{,}05$ équivaut à $F_2(t) = 0{,}05$ et à $e^{-t^2} = 0{,}95$

et à $t^2 = -\ln 0{,}95$, $t = \sqrt{-\ln 0{,}95}$, $t \approx 0{,}22648$,

$t = 0{,}226$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 2

A) 1° la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 0,045, nous savons que la variable $\overline{X}$ suit alors la loi normale de moyenne

$E(\overline{X}) = 40$ et d'écart type $\sigma' = \frac{0{,}045}{\sqrt{5}} \approx 0{,}02012$ donc

$\sigma' = 0{,}02$ à 10^{-3} près.

2° La variable aléatoire $\overline{X}$ suit $\mathcal{N}(40 ; 0{,}02)$, la variable aléatoire $T = \frac{\overline{X} - 40}{0{,}02}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

$p_1 = P(m - 2\sigma' \leq \overline{X} \leq m + 2\sigma')$, $p_1 = P(-2 \leq T \leq 2)$,
$p_1 = 2\,\pi(2) - 1$, $\mathbf{p_1 = 0{,}954}$ **à 10^{-3}** près.

$p_2 = P(m - 3\sigma' \leq \overline{X} \leq m + 3\sigma')$, $p_2 = P(-3 \leq T \leq 3)$,
$p_2 = 2\,\pi(3) - 1$, $\mathbf{p_2 = 0{,}997}$ **à 10^{-3}** près.

$p_3 = P(\overline{X} \leq 39{,}95)$, $P(T \leq -2{,}5) = 1 - \pi(2{,}5)$ donc
$p_3 \approx 1 - 0{,}9938$, $\mathbf{p_3 = 0{,}006}$ **à 10^{-3}** près.

3° $p_4 = p_2 - p_1$, $p_4 = 0{,}997 - 0{,}954$,
$\mathbf{p_4 = 0{,}043}$ **à 10^{-3}** près.

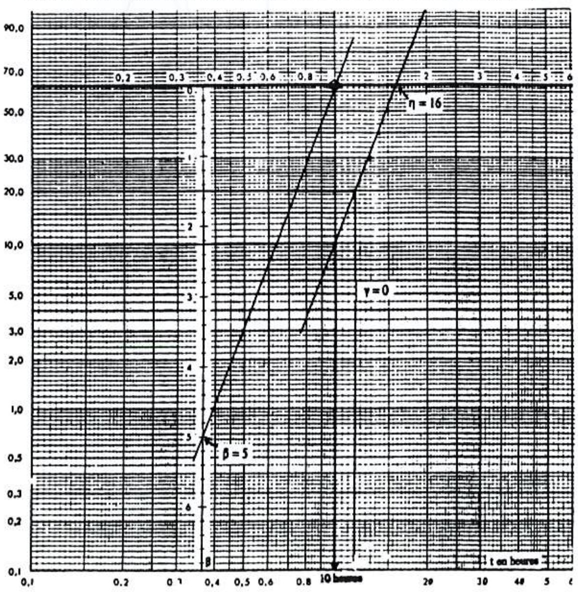
B) 1° Sur la graphique les points sont sensiblement alignés on est donc en présence d'une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$ on trouve graphiquement :

$\eta = 16$ et $\beta = 5$. $\mathbf{R(t) = e^{-(t/16)^5}}$.

2° MTBF $= \eta\,A + \gamma$, on trouve dans le formulaire pour $\beta = 5$: $A = 0{,}9182$, **MTBF $\approx$ 14,7 heures,** par le calcul **$R(14{,}7) \approx 0{,}52$.**

3° $R(t_0) = 0{,}9$ équivaut à $F(t_0) = 0{,}10$, on lit sur le papier de Weibull **$t_0 = 10$ heures.**

Par le calcul $R(t_0) = 0{,}9$ équivaut à $e^{-(t_0/16)^5} = 0{,}9$ et à $-(\frac{t_0}{16})^5 = 0{,}9$ et à $\frac{t_0}{16} = (-\ln 0{,}9)^{0{,}2}$ et à $t_0 \approx 10{,}2$ heures. La périodicité d'un réglage systématique basée sur une fiabilité de 90 % est donc de **10 heures**.



MAINTENANCE Nouvelle Calédonie

1997

EXERCICE 1 (10 points)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A / Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle : (E) $y'' - 3y' + 2y = 5$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Déterminer le nombre réel m pour que la fonction constante h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = m$ soit solution particulière de l'équation différentielle (E).

2° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E_1) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

3° Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4° Trouver la fonction g, solution particulière de l'équation (E), dont la représentation graphique passe par l'origine O d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur – 2.

B / Recherche d'un centre d'inertie

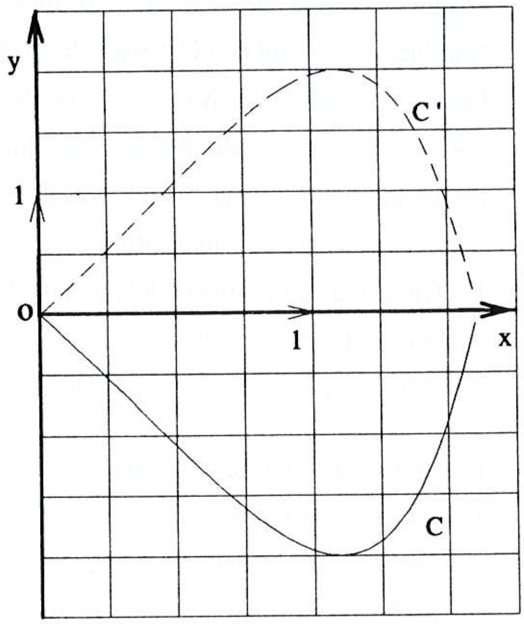
Soit g la fonction définie sur [0, ln 5] par : $g(x) = -3e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$.

On donne sa représentation graphique C sur le dessin ci-contre :

C ' est la courbe symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.

La plaque métallique P homogène dont le contour est constitué par les courbes C et C ' admet pour centre d'inertie le point G d'abscisse :

$$x_G = \frac{\int_0^{\ln 5} x.g(x)\,dx}{\int_0^{\ln 5} g(x)\,dx}$$



1° Montrer que $\int_0^{\ln 5} g(x)\,dx = \frac{5}{2}\ln 5 - 6$.

2° En intégrant par parties, calculer la valeur exacte de l'intégale $\int_0^{\ln 5} x.g(x)\,dx$.

3° En déduire la valeur exacte de x_G, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 (10 points)

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Le fabricant de plats cuisinés "BONPLAT" propose aux commerçants des préparations pour taboulé présentées sous un emballage en carton dans lequel on trouve d'une part un sachet contenant la semoule, d'autre part une boîte métallique contenant la garniture. On peut lire sur chaque emballage en carton les indications suivantes :

garniture : 550 g semoule : 180 g.

A / On note X la variable aléatoire qui, à chaque boîte, prélevée au hasard dans la production, associe sa masse de garniture exprimée en grammes. On admet, à la suite de plusieurs contrôles, que X suit la loi normale de moyenne 550 et d'écart type 5.

1° Déterminer la probabilité que la masse de la garniture d'une boîte prélevée au hasard soit supérieure ou égale à 534 g.

2° Déterminer la probabilité que la masse de la garniture d'une boîte prélevée au hasard soit comprise entre 542 g et 558 g.

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

B / On note Y la variable aléatoire qui, à chaque paquet, prélevé au hasard dans la production, associe sa masse de semoule exprimée en grammes. On admet, à la suite de plusieurs contrôles, que Y suit la loi normale de moyenne 180 et d'écart type 2,7.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Soit $Z = X + Y$ la variable aléatoire qui, à chaque emballage, prélevé au hasard associe la masse de taboulé obtenu en mélangeant le contenu de la boîte de garniture et celui du sachet de semoule, cette masse étant exprimée en grammes.

1° On admet que Z suit une loi normale. Justifier que Z a pour moyenne 730 et pour écart type 5,68 (arrondi à 10^{-2} près) .

2° Démontrer que $P(Z < 720) = 0{,}04$ à 10^{-2} près.

C / Le fabricant vend ses préparations pour taboulé aux commerçants par paquets de 12. La production est assez importante pour qu'un groupement de 12 boîtes puisse être assimilé à un tirage avec remise dans la fabrication totale. On note U la variable aléatoire qui, à chaque lot de 12 boîtes prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de boîtes dans lesquelles la masse de taboulé est inférieure à 720 g.

1° Quelle est la loi suivie par U ? Justifier la réponse donnée.

2° Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que, dans un lot de 12 boîtes prélevées de façon aléatoire, 2 boîtes au moins aient une masse inférieure à 720 g.

EXERCICE 1

A / 1° Soit la fonction constante h définie sur |R par $h(x) = m$, $h'(x) = 0$, $h''(x) = 0$ donc on doit avoir $2m = 5$ ou encore $m = \frac{5}{2}$. h définie sur |R par $h(x) = \frac{5}{2}$ est solution de (E).

2° L'équation caractéristique de (E_1) est $r^2 - 3r + 2 = 0$.
Les solutions de cette équation sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
Les solutions de (E_1) sont donc définies sur |R par :
$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

3° Toutes les solutions de l'équation (E) sont obtenues en faisant la somme des fonctions solutions de l'équation (E_1) et d'une solution particulière de l'équation (E).
Toutes les solutions de l'équation (E) sont donc définies sur |R par : $f(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{5}{2}$.

4° La solution particulière g cherchée est telle que $g(0) = 0$ équivalent à $C_1 + C_2 + \frac{5}{2} = 0$. Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{2x}$; $g'(0) = -2$ est équivalent à $C_1 + 2C_2 = -2$, C_1 et C_2 sont solutions du système:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{5}{2} \\ C_1 + 2C_2 = -2 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{5}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où $C_1 = -3$ et $C_2 = \frac{1}{2}$, pour tout nombre réel x,

$$g(x) = -3e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}.$$

$$\text{B / 1° } A = \int_0^{\ln 5} \left(-3e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}\right)dx,$$

$$A = \left[-3e^{x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{5}{2}\right]_0^{\ln 5},$$

$A = (-15 + \frac{25}{4} + \frac{5}{2}\ln 5) - (-3 + \frac{1}{4})$, $\mathbf{A = -6 + \frac{5}{2}\ln 5}$.

$$2° \ B = \int_0^{\ln 5} x\left(-3e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}\right)dx,$$

Faisons une intégration par parties en posant :
$u(x) = x$, $v'(x) = -3e^{x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5}{2})$,
on obtient : $u'(x) = 1$, $v(x) = -3e^{x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{5}{2}x$,

$$B = \left[x(-3e^{x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{5}{2}x)\right]_0^{\ln 5} - \int_0^{\ln 5} (-3e^{x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{5}{2}x)dx$$

$$B = \left[x(-3e^{x} + \frac{1}{4}2x + \frac{5}{2}x)\right]_0^{\ln 5} - \left[-3e^{x} + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{5}{4}x^2\right]_0^{\ln 5}$$

$B = \ln 5\,(-15 + \frac{25}{4} + \frac{5}{2}\ln 5) - (-15 + \frac{25}{8} + \frac{5}{4}(\ln 5)^2 + 3 - \frac{1}{8})$,

$\mathbf{B = 9 - \frac{35}{4}\ln 5 + \frac{5}{4}(\ln 5)^2}$.

$$3° \ x_G = \frac{B}{A} = \frac{9 - \frac{35}{4}\ln 5 + \frac{5}{4}(\ln 5)^2}{-6 + \frac{5}{2}\ln 5},$$

à 10^{-2} près : $\mathbf{x_G = 0{,}93}$.

EXERCICE 2

A / 1° La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(550, 5)$, la variable aléatoire $T = \frac{X - 550}{5}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
$P(X > 534) = P(T > -3{,}2)$, $P(X > 534) = \pi(3{,}2)$,
$\mathbf{P(X > 534) = 0{,}9993}$ **à 10^{-4} près.**

2° $P(542 < X < 558) = P(-1{,}6 < T < 1{,}6)$,
$P(542 < X < 558) = 2\pi(1{,}6) - 1$, $\pi(1{,}6) \approx 0{,}9452$,
$\mathbf{P(542 < X < 558) = 0{,}8904}$ **à 10^{-4} près.**

B/ 1° Z est la somme de deux variables aléatoires indépendantes.
X suit la loi normale $\mathcal{N}(550, 5)$ et Y suit la loi normale $\mathcal{N}(180, 2{,}7)$ alors Z suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $m = 550 + 180$ et $\sigma = \sqrt{5^2 + 2{,}7^2}$.
Z suit la loi normale de moyenne $m = 730$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{32{,}29}$, $\sigma \approx$ **5,68 à à 10^{-2} près.**

2° Z suit la loi normale $\mathcal{N}(730, \sqrt{32{,}29})$, la variable aléatoire $T = \frac{X - 730}{\sqrt{32{,}29}}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. $P(Z < 720) = P(T < -\frac{10}{\sqrt{32{,}29}})$,
$P(Z < 720) = 1 - \pi(\frac{10}{\sqrt{32{,}29}})$, $P(Z) = 1 - \pi(1{,}76)$,
$\mathbf{P(Z < 720) = 0{,}0392}$ **à 10^{-4} près.**
La valeur arrondie à 10^{-2} près est **0,04.**

C / 1° U est la variable aléatoire qui, à chaque paquet de 12 boîtes, associe le nombre de boîtes dans lesquelles la masse de taboulé est inférieure à 720 g. Chaque tirage est supposé aléatoire et avec remise et mène à deux éventualités : la boîte a une masse inférieure à 720 g avec une probabilité de 0,04 ou bien la boîte a une masse supérieure à 720 g avec une probabilité de 0,96. U suit donc la loi binomiale de paramètres **n = 12 et p = 0,04.**
La probabilité que, dans un paquet de 12 boîtes choisi de façon aléatoire, 2 boîtes au moins aient une masse inférieure à 720 g s'obtient en calculant :
$P(U \geq 2) = 1 - [P(U = 0) + P(U = 1)]$,
$P(U \geq 2) = 1 - C_{12}^{0}(0{,}04)^0(0{,}96)^{12} - C_{12}^{1}(0{,}04)^1(0{,}96)^{11}$.
$P(U \geq 2) \approx 1 - 0{,}6127 - 0{,}3063$, d'où
$P(U \geq 2) \approx$ **0,0,081**, la valeur arrondie à 10^{-2} près est **0,08.**

MECANIQUE ET AUTOMATISMES INDUSTRIELS

MECANIQUE ET AUTOMATISMES INDUSTRIELS

1996

EXERCICE 1 (10 points)

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour. On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque bouchon prélevé au hasard dans la production, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit la loi normale de moyenne $m = 22$ mm et d'écart type $\sigma = 0{,}025$ mm.

Les bouchons sont acceptables si leur diamètre appartient à l'intervalle [21,95 ; 22,05].

Les trois questions de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

1° Quelle est la probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable ?

2° Dans cette question, on considère que la probabilité qu'un bouchon, pris au hasard dans la production, soit défectueux est 0,05 .

On prélève, au hasard un échantillon de 80 bouchons (ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise). On nomme Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 80 bouchons associe le nombre de bouchons défectueux dans cet échantillon.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ? Déterminer l'espérance mathématique de Y.

b) On approche Y par une variable aléatoire Y_1 qui suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$; quelle est la valeur du paramètre λ ?

Calculer la probabilité qu'un tel échantillon contienne exactement 10 bouchons défectueux.

3° En vue du contrôle du réglage de la machine, on prélève dans la production des échantillons aléatoires de 100 bouchons. On appelle $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 100 bouchons associe la moyenne des diamètres des 100 bouchons de cet échantillon. (On assimile ces prélèvements à des tirages avec remise). Lorsque la machine est **bien réglée** $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma' = \frac{\sigma}{10}$ (on rappelle que $m = 22$ et $\sigma = 0{,}025$).

a) Déterminer le nombre réel positif a, tel que $P(22 - a \leq \overline{X} \leq 22 + a) = 0{,}95$.

b) Sur un échantillon de 100 bouchons, on a obtenu les résultats suivants (les mesures des diamètres étant réparties en classes d'amplitude 0,02 mm) :

Diamètres en mm	[21,93;21,95[	[21,95;21,97[	[21,97;21,99[	[21,99;22,01[	[22,01;22,03[	[22,03;22,05[	[22,05;22,07[
Effectif	3	7	27	30	24	7	2

En supposant que tous les bouchons d'une classe ont pour diamètre la valeur centrale de cette classe, donner la moyenne et l'écart type de cette série (aucune justification demandée ; résultats arrondis à l'ordre 10^{-4}).

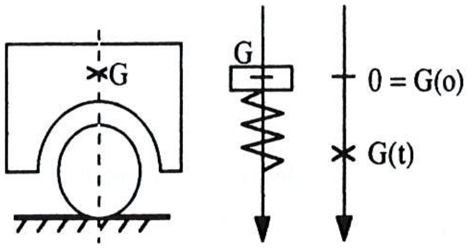
c) On veut construire un test bilatéral permettant de décider si la machine est bien réglée au seuil de risque 5 %.

- Quelle doit-être l'hypothèse nulle H_0 ?
- Quelle doit-être l'hypothèse alternative H_1 ?
- En utilisant la question 3° b), énoncer la règle de décision du test.
- En utilisant l'échantillon de l'énoncé peut-on accepter au seuil de risque 5 %, l'hypothèse selon laquelle la machine est bien réglée ?

EXERCICE 2 (10 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de la suspension d'une remorque dans les deux cas suivants : système sans amortisseur puis avec amortisseur.

Le centre d'inertie G d'une remorque se déplace sur un axe vertical $(O ; \vec{i})$ dirigé vers le bas (unité le mètre) ; il est repéré par son abscisse x(t) en fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que cette remorque à vide peut être assimilée à une masse M (M > 0) reposant sur un ressort fixé à l'axe des roues.



Le point O est la position d'équilibre occupée par G lorsque la remorque est vide.

La remorque étant chargée d'une masse, on enlève cette masse et G se met alors en mouvement. On considère que t = 0 au premier passage de G en O.

A/ Mouvement non amorti

L'abscisse x(t) de G est alors, à tout instant t, solution de l'équation différentielle $M\,x''(t) + k\,x(t) = 0$ où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et k désigne la raideur du ressort, ce qui peut encore s'écrire :

(1) $\quad M\,x'' + k\,x = 0$

On prend : M = 250 kg, k = 6250 N.m^{-1}.

Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = -0{,}10$ m.s^{-1}. Préciser la période de cette solution particulière.

B/ Mouvement amorti

On équipe la remorque d'amortisseurs de constante d'amortissement λ. L'abscisse x(t) du point G vérifie alors à tout instant t l'équation $M\,x''(t) + \lambda\,x'(t) + k\,x(t) = 0$ ce qui peut encore s'écrire :

(2) $\quad M\,x'' + \lambda\,x' + k\,x = 0$

On prend M = 250 kg , k = 6250 N.m^{-1} et λ = 1500 N.s.m^{-1}.

1° a. Déterminer dans ces conditions la solution générale de l'équation différentielle (2).

b. Sachant que que $x(0) = 0$ et $x'(0) = -0{,}08$ m.s^{-1}, déterminer la solution particulière de l'équation (2) définissant le mouvement de G.

2° On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = -0{,}02\,e^{-3t}\sin 4t$.

a. Déterminer les valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0, 1{,}5[$ pour lesquelles $f(t) = 0$.

b. Calculer la dérivée f ' de la fonction f. On admet que, pour $a \neq 0$, les équations $a\sin\alpha + b\cos\alpha = 0$ et $\tan\alpha = -\frac{b}{a}$ d'inconnue α ont les mêmes solutions. Déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près des nombres réels appartenant à l'intervalle $[0, 1{,}5]$ et annulant $f'(t)$. Pour chaque valeur de t ainsi obtenue, préciser la valeur correspondante de f(t).

c. Déduire des questions a. et b. l'allure de la courbe C représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal ; on prendra 10 cm pour unité en abscisse et 1 cm pour 0,002 unité en ordonnée.

EXERCICE 1

1° La variable aléatoire X qui, à chaque bouchon prélevé au hasard dans la production associe son diamètre, suit la loi normale $\mathcal{N}$ (22 ; 0,025), la variable aléatoire $T = \frac{X - 22}{0{,}025}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}$ (0, 1).

La probabilité qu'un bouchon, tiré au hasard dans la production ait son diamètre compris entre 21,95 et 22,05 est

$P(21{,}95 \le X \le 22{,}05) = P(-\frac{0{,}5}{0{,}025} \le T \le \frac{0{,}5}{0{,}025})$,

$P(21{,}95 \le X \le 22{,}05) = P(-2 \le T \le 2)$

$P(21{,}95 \le X \le 22{,}05) = 2\pi(2) - 1$,

$P(21{,}95 \le X \le 22{,}05) \approx 2(0{,}9772) - 1$,

$\mathbf{P(21{,}95 \le X \le 22{,}05) \approx 0{,}9544}$ à 10^{-4} près.

La probabilité qu'un bouchon, tiré au hasard dans la production ait son diamètre compris entre 21,95 et 22,05 est donc **0,95** à 10^{-2} près.

2° a) On est donc en présence d'une succession de 80 épreuves indépendantes (tirages aléatoires avec remise), chacune ayant deux issues : bouchon défectueux avec une probabilité constante 0,05 ou non défectueux avec la probabilité 0,95.

Donc Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (80 ; 0,05).

E(Y) = np = 80(0,05) , **E(Y) = 4.**

b) Y_1 suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$, on trouve dans la table de Poisson $\mathbf{P(Y_1 = 10) = 0{,}005}$ **à** 10^{-3} **près.**

3° a) La variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à chaque échantillon de 100 bouchons prélevé au hasard dans la production associe la moyenne des diamètres des bouchons, suit la loi normale $\mathcal{N}(22 ; \frac{0{,}025}{\sqrt{100}})$ soit $\mathcal{N}(22 ; 0{,}0025)$,

la variable aléatoire $T = \frac{\overline{X} - 22}{0{,}0025}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}$ (0, 1).

$P(22 - a < \overline{X} < 22 + a) = 0{,}95$ équivaut à

$P(-\frac{a}{0{,}0025} < T < \frac{a}{0{,}0025}) = 0{,}95$,

$P(-1{,}96 \le T \le 1{,}96) = 0{,}95$, donc $\frac{a}{0{,}0025} = 1{,}96$,

$a \approx 0{,}0049$ d'où $P(21{,}9951 \le \overline{X} \le 22{,}0049) = 0{,}95$.

b) La calculatrice donne $\overline{x} = 21{,}9988$ et $\sigma' = 0{,}0246$.

c) **Construction du test :**

- *choix de H_0* : m = 22 *choix de H_1* : m ≠ 22.
- *détermination de la région critique* :

Sous l'hypothèse H_0, m = 22, la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à tout échantillon de taille 100 associe sa moyenne, suit la loi normale $\mathcal{N}$ (22 ; 0,0025).

D'après le a) $P(21{,}9951 \le \overline{X} \le 22{,}0049) = 0{,}95$.

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle [21,9951 ; 22,0049],

- *règle de décision :*

On prélève un échantillon aléatoire non exhaustif de 100 bouchons, on calcule sa moyenne $\overline{x}$

si $\overline{x} \in [21{,}9951 ; 22{,}0049]$ on accepte H_0.

si $\overline{x} \notin [21{,}9951 ; 22{,}0049]$ on rejette H_0 et on accepte H_1.

Utilisation du test : $\overline{x} = 21{,}9988$

$\overline{x} \in [21{,}9951 ; 22{,}0049]$ on accepte H_0 , au seuil de risque 5%, la moyenne des diamètres des bouchons de la production est 22 mm ; la machine est bien réglée.

EXERCICE 2

A/ M x" + k x = 0 pour M = 250 et k = 6250 donne 250 x" + 6250 = 0 ou x" + 25 x = 0.

L'équation caractéristique de (1) est $r^2 + 25 = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions x définies sur [0, +∞[par :

x(t) = A cos 5t + B sin 5t

Pour tout t ≥ 0, x(0) = 0 d'où A = 0 , donc

x'(t) = 5B cos 5t, x'(0) = – 0,1 d'où 5 B = – 0,1

B = – 0,02, x(t) = – 0,02 sin 5t pour tout t ≥ 0.

La période de cette solution particulière est $T = \frac{2\pi}{5}$.

B/ 1° L'équation (2) est 250x" + 1500 x' + 6250 x = 0 ou x" + 6 x' + 25 x = 0.

a. L'équation caractéristique est $r^2 + 6r + 25 = 0$.

$\Delta = -64 = 64 i^2$, $r = -3 \pm 4i$

Les solutions de l'équation différentielle (2) sont les fonctions x définies sur [0, +∞[par :

$x(t) = e^{-3t}$ (A cos 4t + B sin 4t)

b. Pour tout t ≥ 0, x(0) = 0 d'où A = 0 , donc

$x(t) = e^{-3t}$ B sin 4t,

$x'(t) = e^{-3t}\, 4$ B cos 4t – $3e^{-3t}$ B sin 4t

x'(0) = – 0,1 d'où 4 B = – 0,08 , B = – 0,02,

$\mathbf{x(t) = -0{,}02\ e^{-3t} \sin 4t}$ pour tout t ≥ 0.

2° f est définie sur [0, +∞[par $f(t) = -0{,}02\ e^{-3t} \sin 4t$

a. f(t) = 0 équivaut à sin 4t = 0 et à 4t = kπ et à $t = \frac{k\pi}{4}$ avec k entier relatif ; sur [0 ; 1,5[on obtient

$\mathbf{t = 0}$ **ou** $\frac{\pi}{4}$.

b. $f'(t) = 0{,}06\ e^{-3t} \sin 4t - 0{,}08\ e^{-3t} \cos 4t$,

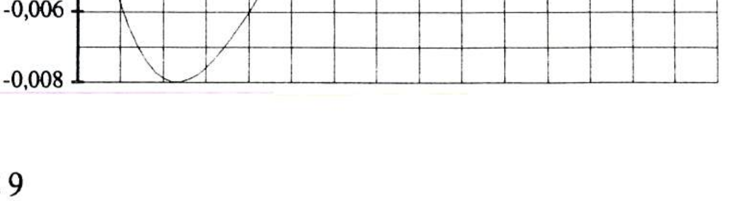
$f'(t) = 0{,}02\ e^{-3t} (3 \sin 4t - 4 \cos 4t)$

f'(t) = 0 équivaut à $\tan 4t = \frac{4}{3}$ et à 4 t = 0,9273 + kπ et à $t = 0{,}23 + \frac{k\pi}{4}$, sur [0 ; 1,5[on obtient :

t = 0,23 ou 1,02.

f(0,23) ≈ – 0,008 , f(1,02) ≈ 0,0008.

c)



MECANIQUE ET AUTOMATISMES INDUSTRIELS

1997

EXERCICE 1 (12 points)

Partie A : résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = -4\,e^{2x}$.

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° Donner la forme générale des solutions de l'équation (E') : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

2° Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\,x\,e^{2x}$ soit solution de l'équation (E).

3° a) Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).

b) Déterminer la solution f de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par le point $S(0, 2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B : étude d'une solution particulière de l'équation différentielle (E)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\,e^{2x}(1 - 2x)$.

On appelle (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2 cm.

1° a) Etudier la limite de f en $-\infty$.

b) Etudier la limite de f en $+\infty$.

En déduire que C admet une asymptote (que l'on précisera). Préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.

2° Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3° Tracer la courbe (C).

4° A l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

Donner la valeur de cette aire arrondie au mm^2 .

EXERCICE 2 (8 points)

Une entreprise fabrique en série des pièces. On définit une variable aléatoire D qui, à toute pièce prélevée au hasard dans la prodution associe son diamètre, mesuré en millimètres.
On admet que cette variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

1° Estimation de m et σ :

a) Un échantillon de 100 pièces est prélevé au hasard dans la production. Les mesures des diamètres des pièces de cet échantillon sont regroupées dans le tableau suivant :

Mesure des diamètres (en mm)	[4,0 ; 4,2[	[4,2 ; 4,4[	[4,4 ; 4,6[	[4,6 ; 4,8[	[4,8 ; 5,0[
effectifs	6	24	41	25	4

En faisant l'hypothèse que, pour chaque classe, les valeurs mesurées sont égales à celle du centre de la classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne d et l'écart type s de cette échantillon.
En déduire *une* estimation ponctuelle de σ fournie par cet échantillon.

b) On appelle $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 pièces, associe la moyenne des diamètres des pièces de l'échantillon.
La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler tout échantillon de 100 pièces prélevé dans la production à un tirage avec remise de n pièces.
On rappelle que la variable aléatoire $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\frac{\sigma}{10}$.
Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne m de la variable aléatoire D au seuil de confiance 95 %.

2° Dans cette question, on admet que la production comporte 5 % de pièces inutilisables.

a) L'entreprise conditionne ses pièces par boîtes de 25.
On tire une boîte au hasard.
On désigne par K la variable aléatoire qui, à toute boîte de ce type associe le nombre de pièces inutilisables dans cette boîte.
La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler tout échantillon de 25 pièces prélevé dans la production à un tirage avec remise de 25 pièces.
Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire K ?
Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'une telle boîte contienne au plus une pièce inutilisable.

b) Un client qui a besoin de 185 pièces commande 8 boîtes de pièces (on assimile cette épreuve à un tirage aléatoire avec remise de 200 pièces dans la production).
On désigne par L la variable aléatoire qui, à toute commande de ce type, associe le nombre de pièces inutilisables dans cette commande.
On admet que L suit la loi de Poisson de paramètre 10.
Quelle est la probabilité que le client dispose d'un nombre suffisant de pièces utilisables dans sa commande ?

EXERCICE 1

Partie A : (E) $y'' - 3y' + 2y = -4\,e^{2x}$.

1° L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Cette équation admet pour solution $r_1 = 1$ ou $r_2 = 2$. On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x}$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

2° Pour tout x de $\mathbb{R}$, soit $g(x) = ax\,e^{2x}$.

On a $g'(x) = a\,e^{2x} + 2\,ax\,e^{2x}$

et $g''(x) = 4\,a\,e^{2x} + 4\,ax\,e^{2x}$.

Si g est une solution de (E) alors

$g''(x) - 3\,g'(x) + 2\,g(x) = -4\,e^{2x}$,

$4a\,e^{2x} + 4ax\,e^{2x} - 3ax\,e^{2x} - 6ax\,e^{2x} + 2ax\,e^{2x} = -4e^{2x}$, $a\,e^{2x} = -4\,e^{2x}$, $a = -4$.

Donc la fonction g telle que $g(x) = -4x\,e^{2x}$, est solution particulière de (E).

3° a) La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation sans second membre associée, soit :

$y = -4x\,e^{2x} + C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x}$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

b) La solution f de (E) vérifie les conditions :

$f(0) = 1$ qui équivaut à $C_1 + C_2 = 2$,

$f'(x) = -4\,e^{2x} - 8x\,e^{2x} + C_1\,e^{x} + 2\,C_2\,e^{2x}$,

et $f'(0) = 0$ qui équivaut à $-4 + C_1 + 2\,C_2 = 0$,

d'où $C_2 = 2$ et $C_1 = 0$.

La solution f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2\,e^{2x} - 4x\,e^{2x}$, $\mathbf{f(x) = 2\,(1 - 2x)\,e^{-2x}}$.

Partie B : Pour tout réel x de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 2\,(1 - 2x)\,e^{2x}$, $f(x) = 2\,e^{2x} - 4x\,e^{2x}$.

$\lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 2\,(1 - 2x) = -\infty$,

$\lim_{x \to +\infty} 2\,(1 - 2x)\,e^{2x}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,

de $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} 2x\,e^{2x} = 0$,

on déduit que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote à (C).

$f(x) = 2\,(1 - 2x)\,e^{2x} > 0$ pour $x < \frac{1}{2}$ donc (C) est au dessus de l'axe des abscisses lorsque $x \to -\infty$.

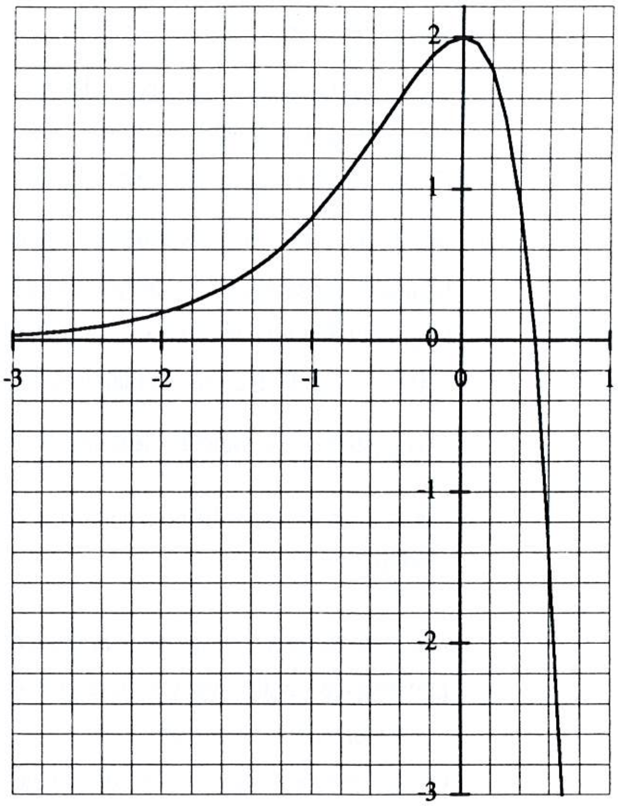
2° Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4\,e^{2x} - 4\,e^{2x} - 8x\,e^{2x}$,

$f'(x) = -8x\,e^{2x}$, $f'(x)$ est du signe de $-x$,

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	2	↘	$-\infty$

3°



4° $A = 4\displaystyle\int_{-2}^{0} 2\,(1 - 2x)\,e^{2x}\,dx$ car

En posant $u(x) = (1 - 2x)$, $v'(x) = 2\,e^{2x}$,

on obtient : $u'(x) = -2$, $v(x) = e^{2x}$,

en intégrant par parties :

$$A = 4\left(\left[(1 - 2x)e^{2x}\right]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} 2e^{2x}\,dx\right);$$

$A = 4\left[(1 - 2x)e^{2x} + e^{2x}\right]_{-2}^{0}$, $A = 4(2 - 6\,e^{-4})$

$A = 8(1 - 3\,e^{-4})$ cm².

EXERCICE 2

1° a) La calculatrice donne, à 10^{-2} près, **d = 4,49** et **s = 0,19** . Une estimation ponctuelle de σ , à 10^{-2} près, est $s\sqrt{\frac{100}{99}}$ = **0,19.**

b) Un intervalle de confiance à 95 % de la moyenne m est l'intervalle $[\ d - 1{,}96\ \frac{\sigma}{10}\ ;\ d + 1{,}96\ \frac{\sigma}{10}\ ]$, en utilisant l'estimation de σ obtenu au a) on obtient :

$$[4{,}49 - 1{,}96\frac{0{,}19}{10}\ ;\ 4{,}49 + 1{,}96\frac{0{,}19}{10}]$$

Donc un intervalle de confiance de m , à 10^{-2} près, au coefficient de confiance 95 % est **[4,45 ; 4,53].**

2° a) On est en présence d'une succession de 25 épreuves aléatoires indépendantes (on assimile les prélèvements à des tirages avec remise), chaque épreuve pouvant déboucher sur deux éventualités : " la pièce tirée est inutilisable " de probabilité p = 0,05 , ou " la pièce tirée est utilisable " de probabilité q = 0,95 ".

La variable aléatoire K qui, à toute boîte de 25 pièces associe le nombre de pièces inutilisables suit la loi binomiale **$\mathscr{B}$ (25 ; 0,05) .**

L'événement "la boite contient au plus une pièce inutilisable" est $X \leq 1$.

Les événements X = 0 et X = 1 étant incompatibles on obtient : $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$,

$P(X \leq 1) = C_{25}^{0}\ (0{,}05^0 (0{,}95)^{25} + C_{25}^{1}\ (0{,}05)^1 (0{,}95)^{24}$,

$P(X \leq 1) = 0{,}277 + 0{,}365$ à 10^{-3} près.

$P(X \leq 1)$ = 0,642 à 10^{-3} près.

b) La variable aléatoire L suit la loi de Poisson $\mathscr{P}$ (10), l'événement : "le client dispose d'un nombre suffisant de pièces utilisables" est $L \leq 15$.

Les événements L = 0, L = 1, l = 2, ..., L = 15 étant incompatibles on obtient :

$P(L \leq 15) = P(L = 0) + P(L = 1) + ...P(L = 15)$,

à l'aide de la table du formulaire on trouve

$P(L \leq 15)$ = 0,952 à 10^{-3} près.

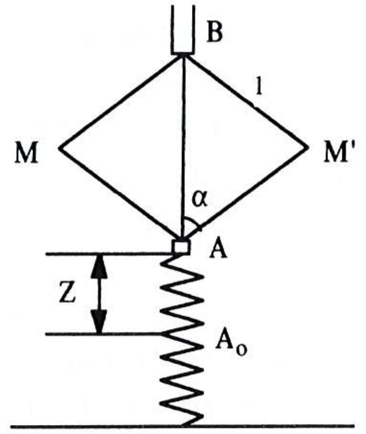
PRODUCTIQUE

PRODUCTIQUE

1996

EXERCICE 1

Un arbre vertical tournant d'un mouvement uniforme avec une vitesse angulaire ω, entraîne par deux manchons A et B un losange articulé AMBM' dont les quatre côtés ont pour longueur l .



Les masses des tiges sont négligeables, les articulations A et B sont à des distances très petites de l'axe et les articulations M et M' portent deux charges égales m. Le manchon B est fixe sur l'axe. Le manchon A glisse sans frottement sur l'axe ; il est soumis à l'action d'un ressort R (de constante de raideur K) dont l'action s'annule en même temps que l'angle α des tiges avec l'axe.

Pour une vitesse de rotation constante, on montre que l'angle α est constant.

Au repos, $\alpha = 0$, $A_0A = 0$ et $A_0B = 2l$.

Le problème consiste à étudier le déplacement A_0A du point A.

Les lois de la mécanique permettent d'établir que si l'on pose :

$$Z = 2l \frac{\omega^2 - \frac{g}{l}}{\omega^2 + \frac{2K}{m}}$$ où g désigne l'accélération de la pesanteur,

alors $A_0A = Z$ si $Z \neq 0$ et sinon $A_0A = 0$.

1) On donne $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 0{,}10$ m , $K = 2500 \text{ N.m}^{-1}$, $m = 0{,}2$ kg.

   a) Sachant que la vitesse de rotation ω exprimée en rad.s^{-1} est liée au nombre x de tours par minute par $\omega = \frac{2\pi x}{60}$, montrer que : $Z = 0{,}2 \frac{x^2 - 9.10^3}{x^2 + 2{,}25.10^6}$ (on prendra $\pi^2 = 10$).

   b) A partir de quelle valeur x_0 de x, Z est-il positif ? En déduire la vitesse de rotation ω_0 à partir de laquelle le point A se soulève.

   c) A quelle vitesse de rotation correspond un allongement de 10 cm ?

   d) Montrer que $Z + 2l \cos \alpha = 2l$.

   En déduire la vitesse de rotation qui correspond à un angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2) On définit, pour $x > x_0$, la sensibilité de cet appareil par $\sigma = x \frac{dZ}{dx}$ où $\frac{dZ}{dx}$ représente la dérivée de Z par rapport à x.

   a) Calculer en fonction de x la sensibilité de cet appareil. (On présentera σ sous la forme $\sigma = a.[g(x)]^2$ où a est une constante et g(x) une expression dépendant de x à déterminer).

   Déterminer la valeur de x pour laquelle cette sensibilité est maximale (on pourra résoudre $g'(x) = 0$).

   b) Pour quelle vitesse de rotation, cette sensibilité est-elle maximale ?

EXERCICE 2

Les résultats approchés des calculs de probabilités seront donnés à 10^{-3} près.

1ère PARTIE

Trois machines M_1, M_2, M_3 produisent le même type de tiges d'acier.

Les productions journalières de M_1, M_2, et M_3 sont $n_1 = 2200$, $n_2 = 2100$ et $n_3 = 1700$.

La probabilité qu'une tige tirée au hasard parmi la production journalière d'une même machine soit défectueuse est $p_1 = 0{,}06$ pour M_1, $p_2 = 0{,}08$ pour M_2, $p_3 = 0{,}07$ pour M_3.

On tire une tige au hasard, parmi la production journalière totale. Quelle est la probabilité :

1) a) que la tige soit défectueuse et provienne de M_1 ;

b) que la tige soit défectueuse et provienne de M_2 ;

c) que la tige soit défectueuse et provienne de M_3 ;

d) que la tige soit défectueuse ?

2) que cette tige provienne de M_1 sachant qu'elle est défectueuse ?

2ième PARTIE

Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement à la production journalière de M_1.

1) On désigne par R la variable aléatoire qui, à toute tige prélevée au hasard dans la production, associe la résistance à la rupture de cette tige, exprimée en kg.cm^{-2}. Cette variable aléatoire suit la loi normale d'espérance mathématique $m = 50$ kg.cm^{-2} et d'écart type $\sigma = 2$ kg.cm^{-2}.

Dans cette production, une pièce est jugée défectueuse si sa résistance à la rupture est inférieure à 46,9 kg.cm^{-2} (rupture de tolérance).

Déterminer la probabilité p'_1 qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse.

2) Avec l'introduction d'un nouvel alliage dans le procédé de fabrication de M, on désire obtenir une résistance moyenne à la rupture plus élevée.

Une nouvelle fabrication a été effectuée et on a prélevé un échantillon aléatoire de 100 tiges, assimilé à un échantillon prélevé avec remise. On a relevé les données suivantes :

Résistance en kg.cm^{-2}	[46, 47[	[47, 48[	[48, 49[	[49, 50[	[50, 51[	[51, 52[	[52, 53[	[53, 54[
Effectif	2	9	11	18	21	18	13	8

a) Le regroupement des données ne permet pas le calcul de la moyenne et de l'écart type. Néanmoins pour en déterminer des valeurs approchées, on admet que toutes les données sont au centre de la classe. Donner dans ces conditions une valeur approchée de la moyenne et de l'écart type de cet échantillon à 10^{-1} près.

b) On veut construire un test unilatéral, au seuil de signification 0,95, permettant d'accepter ou de refuser l'hypothèse "il y a une augmentation significative de la résistance moyenne à la rupture". On suppose que l'écart type de la production est toujours $\sigma = 2$.

On prend pour hypothèse nulle $H_0 : m = 50$ et pour hypothèse alternative $H_1 : m > 50$.

On désigne par $\overline{R}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de 100 tiges, associe la résistance moyenne à la rupture des tiges de cet échantillon.

- Déterminer sous H_0 le réel positif h tel que $P(\overline{R} \leq 50 + h) = 0{,}95$.
- Enoncer la règle de décision de ce test.
- Utiliser ce test avec l'échantillon de l'énoncé et conclure, au seuil de signification 95 %, s'il y a une augmentation significative de la résistance moyenne à la rupture.

EXERCICE 1

1) a) $Z = 2l \dfrac{\omega^2 - \dfrac{g}{l}}{\omega^2 + \dfrac{2K}{m}}$, $Z = 2 \times 0,1 \dfrac{\dfrac{4\pi^2x^2}{3600} - \dfrac{10}{0,1}}{\dfrac{4\pi^2x^2}{3600} + \dfrac{2.2500}{0,2}}$,

$Z = 0,2 \dfrac{x^2 - 9.10^3}{x^2 + 2,25.10^6}$.

b) Z est positif quand $x^2 \geq 9000$, $x \geq 30\sqrt{10}$, $x_0 \approx 94,87$.

$\omega = \dfrac{2\pi x}{60}$, $\omega_0 = \pi\sqrt{10}$, $\omega_0 \approx 9,93$ rad.s^{-1} , $\omega_0 \approx 10$.

c) Si $0,2 \dfrac{x^2 - 9.10^3}{x^2 + 2,25.10^6} = 0,1$ alors

$2(x^2 - 9000) = x^2 - 2,25.10^6$, $x^2 = 2,268.10^6$,

$x \approx 1505,99$ et $\omega \approx 157,71$ rad.s^{-1}.

d) $A_0B = A_0A + AB$ et $AB = 2\,AH = 2\,l \cos\alpha$,

$A_0B = 2\,l$, donc $Z + 2\,l\cos\alpha = 2\,l$.

si $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ $Z + 2\,l.\dfrac{1}{2} = 2\,l$, $Z = l = 0,10$.

D'après la question c) $\omega = 157,71$ rad.s^{-1}.

2) a) $\sigma = x\,Z' = 0,2\,x\dfrac{2x(x^2 + 2,25.10^6) - (x^2 - 9000)}{(x^2 + 2,25.10^6)^2}$

$\sigma = 0,4 \times 2,259.10^6 \dfrac{x^2}{(x^2 + 2,25.10^6)^2}$

donc $a = 0,4 \times 2,259.10^6$ et $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2,25.10^6}$,

la sensibilité σ est maximale quand $\sigma' = 0$ et $\sigma = a\,[g(x)]^2$,

$\sigma' = 2a\,g(x).g'(x)$ donc $g'(x) = 0$.

$g'(x) = \dfrac{(x^2 - 2,25.10^6) - 2x^2}{(x^2 + 2,25.10^6)^2}$

$g'(x) = \dfrac{2,25.10^6 - x^2}{(x^2 + 2,25.10^6)^2}$, $g'(x) = 0$ pour $x = 2,25.\ 10^6$

donc pour $x \approx 1500$.

b) $\omega = \dfrac{2\pi x}{60}$, pour $x = 1500$ on a $\omega = 50\pi$,

$\omega = 157,08$ rad.s^{-1}.

EXERCICE 2

Première PARTIE

1. On prélève une tige au hasard dans la production.

On note A l'événement "la tige provient de l'atelier M_1", B l'événement "la tige provient de l'atelier M_2", C l'événement "la tige provient de l'atelier M_3" et D l'événement "la tige est défectueuse".

D'après l'énoncé : $P(A) = \dfrac{2200}{6000} = \dfrac{22}{60}$,

$P(B) = \dfrac{2100}{6000} = \dfrac{21}{60}$, $P(C) = \dfrac{1700}{6000} = \dfrac{17}{60}$,

$P(D/A) = 0,06$, $P(D/B) = 0,08$ et $P(D/C) = 0,07$.

a) L'événement "la tige est défectueuse et provient de M_1", est $A \cap D$ donc : $P(A \cap D) = P(A) \times P(D/A)$,

$P(A \cap D) = \dfrac{22}{60} \times 0,06$,

$P(A \cap D) = 0,022$ à 10^{-3} près.

b) L'événement "la tige est défectueuse et provient de M_2", est $B \cap D$ donc $P(B \cap D) = P(B) \times P(D/B)$,

$P(B \cap D) = \dfrac{21}{60} \times 0,08$, **$P(B \cap D) = 0,028$** à 10^{-3} près.

c) L'événement "la tige est défectueuse et provient de M_3", est $C \cap D$ donc : $P(C \cap D) = P(C) \times P(D/C)$,

$P(C \cap D) = \dfrac{17}{60} \times 0,07$, **$P(C \cap D) = 0,020$** à 10^{-3} près.

Une tige est défectueuse signifie " la tige est défectueuse **et** provient de M_1 **ou** la tige est défectueuse **et** provient de M_2 **ou** la tige est défectueuse **et** provient de M_3".

Les événements $A \cap D$, $B \cap D$ et $C \cap D$ sont incompatibles donc $P(D) = P[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)]$

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

$P(D) = 0,070$ à 10^{-3} près.

2) L'événement "sachant la tige est défectueuse, elle provient de M_1" est A/D , la probabilité de cet événement est : $P(A/D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)}$,

$P(A/D) = \dfrac{0,022}{0,07}$, **$P(A/D) = 0,314$** à 10^{-3} près.

Deuxième PARTIE

1) R suit la loi $\mathcal{N}$ (50, 2), $T = \dfrac{R - 50}{2}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$p'_1 = P(R < 46,9) = P(T < \dfrac{46,9 - 50}{2})$,

$p'_1 = P(T < -1,55)$, $p'_1 = 1 - \pi(1,55)$,

$p'_1 = 1 - 0,9394$, $p'_1 = 0,060$ à 10^{-3} près.

2) a) La calculatrice donne $\bar{x} = 50,4$ kg.cm^{-2} et $\sigma_e = 1,8$ kg.cm^{-2} .

b) **Construction du test :**

choix de H_0 : m = 50 *choix de H_1* : m > 50 ;

détermination de la région critique :

Sous l'hypothèse H_0, m = 50, la variable aléatoire R suit la loi normale $\mathcal{N}(50 ; 2)$, la variable aléatoire $\bar{R}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(50 ; 0,2)$, la variable $T' = \dfrac{\bar{R} - 50}{0,2}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(\bar{R} \leq 50 + h) = 0,95$ équivaut à

$P(T' \leq \dfrac{h}{0,2}) = 0,95$ et à $\pi(\dfrac{h}{0,2}) = 0,95$

$h \approx 1,645 \times 0,2$, $h \approx 0,329$.

$P(\bar{R} \leq 50,329) = 0,95$. Si H_0 est vraie on a 95 % de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne est inférieure à 50,329

règle de décision :

On prélève au hasard un échantillon non exhaustif de 100 tiges, on calcule la moyenne $\bar{x}$ de cet échantillon

si $\bar{x} \leq 50,329$ on accepte H_0,

si $\bar{x} > 50,329$ on rejette H_0 et on accepte H_1.

Utilisation du test : $\bar{x} = 50,4$,

$\bar{x} > 50,329$ on rejette H_0, on accepte H_1

L'hypothèse m > 50 est donc à accepter au seuil de risque 5 %. Au seuil de 5 % il y a augmentation significative de la résistance à la rupture.

PRODUCTIQUE

1997

EXERCICE 1 (8 points)

Un solénoïde possède les caractéristiques suivantes : la résistance est $R = 4\ \Omega$ et l'inductance est $L = 0{,}2$ H. Il est parcouru par un courant continu d'intensité $I_0 = 0{,}5$ A. On ouvre alors le circuit à l'instant $t = 0$. Le courant ne s'annule pas instantanément, mais diminue rapidement en fonction du temps. On note $I(t)$ l'intensité du courant, exprimée en ampère, à l'instant $t \geq 0$, exprimé en seconde.

1) On admet que la fonction I vérifie l'équation différentielle $y' + \frac{R}{L}\, y = 0$

a) Quelle est la solution générale de cette équation différentielle ?

b) Quelle est la solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0{,}5$?

2) Dans la suite de l'exercice, on pose : $I(t) = 0{,}5\, e^{-20t}$.

a) Calculer la limite de $I(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

b) Calculer la dérivée $I'(t)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction I quand t décrit l'intervalle $[0, +\infty[$.

3) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

t en seconde	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
I(t) en ampère		0,41						0,12	

On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près de $I(t)$.

b) Construire avec soin la courbe représentative de la fonction I en respectant les échelles suivantes : en abscisse : 2 cm pour 0,01 s ; en ordonnée : 4 cm pour 0,1 A.

4) a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de l'instant t où l'intensité du courant est égale à la moitié de sa valeur initiale.

b) Retrouver le résultat précédent par résolution de l'équation $I(t) = \frac{1}{2} I_0$.

5) Calculer la quantité d'électricité véhiculée durant toute la phase d'annulation du courant, c'est à dire la limite quand T tend vers $+\infty$ de Q_T, où $Q_T = \displaystyle\int_0^T I(t)\, dt$.

EXERCICE 2 (12 points)

Une entreprise fabrique en série des tôles en acier galvanisé. Ces tôles sont rectangulaires. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute tôle prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur exprimée en centimètres et par Y la variable aléatoire qui, à toute tôle prélevée au hasard dans la production, associe sa largeur exprimée en centimètres.

Ces deux variables aléatoires sont supposées indépendantes.

La longueur d'une tôle est déclarée conforme lorsqu'elle est comprise entre 99,9 cm et 100,1 cm.

La largeur d'une tôle est déclarée conforme lorsqu'elle est comprise entre 59,9 cm et 60,1 cm.

1) On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $m = 100$ et d'écart type $\sigma = 0{,}04$, et que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $m = 60$ et d'écart type $\sigma = 0{,}04$.
   a) Calculer la probabilité qu'une tôle, prise au hasard dans la production, soit de longueur conforme.
   b) Répondre à la même question pour une largeur conforme.
   c) En déduire la probabilité qu'une tôle, prise au hasard dans la production, soit conforme dans ses deux dimensions.

2) Ces tôles sont soumises à un traitement protecteur par galvanisation.
   Il est impératif de contrôler régulièrement l'épaisseur du revêtement protecteur.
   On dispose pour cela de deux procédés possibles : le premier (procédé A) est peu coûteux, mais peu précis ; le second (procédé B) est plus fiable, mais coûteux car il nécessite la destruction du revêtement.
   On a comparé les deux procédés en contrôlant 10 tôles. Sur le tableau ci-après, on trouvera les épaisseurs, exprimées en micron, estimées par chacun des deux procédés :

N° de la tôle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Epaisseur x_i selon le procédé A	47	52	60	50	55	55	58	62	60	58
Epaisseur y_i selon le procédé B	45	49	55	48	50	52	54	56	54	53

   a) Construire le nuage des points M_i de coordonnées (x_i, y_i).
   b) Calculer les coordonnées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ du point moyen G du nuage.
   c) Donner le coefficient de corrélation linéaire r de x et y. Que peut-on en conclure ?
   d) Donner une équation de la droite de régression de y en x et la construire sur le graphique du a).
   e) Lors d'un contrôle, le procédé A indique une épaisseur du revêtement de cette tôle égale à 65 μ. Donner une valeur approchée plus fiable de l'épaisseur du revêtement de cette tôle.

3) Question hors programme (la taille de l'échantillon prélevé est 10).

EXERCICE 1

1° a) L'équation différentielle est de la forme

$y'(t) + a\, y(t) = 0$ avec $a = \frac{R}{L}$. La solution générale est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = K\, e^{-at}$ où K est une constante réelle quelconque. Toutes les solutions de l'équation différentielle sont donc définies sur $[0, +\infty[$ par

$y(t) = K\, e^{-\frac{R}{L}t}$ où K est une constante réelle quelconque.

b) $y(0) = 0,5$, c'est à dire $K = 0,5$ puisque $e^0 = 1$.

La solution cherchée est donc définie sur $[0, +\infty[$ par

$I(t) = 0,5\, e^{-\frac{R}{L}t}$ en prenant $R = 4$ et $L = 0,2$ on obtient $I(t) = 0,5\, e^{-20t}$.

2° a) $\lim\limits_{t\to+\infty} -20t = -\infty$, $\lim\limits_{u\to-\infty} e^{-u} = 0$ donc

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-20t} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} 0,5\, e^{-20t} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = 0$.

b) Pour tout t de $[0, +\infty[$, $I'(t) = -10\, e^{-20t}$.

c) Pour tout réel t de $[0, +\infty[$, $e^{-20t} > 0$ donc $I'(t) < 0$.

$I(0) = 0,5$ d'où le tableau :

t	0	$+\infty$
I '(t)	–	
I(t)	0,5 ↘	0

3° a)

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
I(t)	0,5	0,41	0,34	0,27	0,22	0,18	0,15	0,12	0,10

b) Voir graphique page suivante.

4° a) On lit sur le graphique que le point de la courbe dont l'ordonnée est $\frac{0,5}{2} = 0,25$ a pour abscisse environ 0,034.

b) Les équations suivantes sont équivalentes dans $[0, +\infty[$:

$I(t) = I$, $0,5\, e^{-20t} = 0,25$, $e^{-20t} = 0,5$,

$-20\,t = \ln 0,5$, $-20\,t = \ln\frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{20}\ln 2$,

$t \neq$ **0,0347** à 10^{-4} près.

5° $Q_T = \int_0^T 0,5\, e^{-20t}\, dt$,

$Q_T = \left[0,5\left(-\frac{1}{20}\right) e^{-20t}\right]_0^t$,

$Q_T = -0,025\left[e^{-20t}\right]_0^t$,

$Q_T = -0,025\,(e^{-20T} - 1)$,

$Q_T = 0,025 - 0,025\, e^{-20T}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-20T} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} Q_T = \mathbf{0,025}$.

EXERCICE 2

1° a) La variable aléatoire X qui, à toute tôle prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur exprimée en centimètres suit la loi normale de moyenne m = 100 et d'écart type $\sigma = 0,04$.

La variable aléatoire $T = \frac{X - 100}{0,04}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

La longueur d'une tôle est déclarée conforme lorsqu'elle est comprise entre 99,9 cm et 100,1 cm.

La probabilité cherchée est :

$P(99,9 \le X \le 100,1) = P\left(-\frac{0,1}{0,04} \le T \le \frac{0,1}{0,04}\right)$,

$P(99,9 \le X \le 100,1) = P(-2,5 \le T \le 2,5)$,

$P(99,9 \le X \le 100,1) = 2\,\pi(2,5) - 1$,

$P(99,9 \le X \le 100,1) = 2\,(0,9938) - 1$,

$P(99,9 \le X \le 100,1) = 0,9876$.

b) La variable aléatoire Y qui, à toute tôle prélevée au hasard dans la production, associe sa largeur exprimée en centimètres suit la loi normale de moyenne m = 60 et d'écart type $\sigma = 0,04$. La variable $T' = \frac{Y - 60}{0,04}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

La largeur d'une tôle est déclarée conforme lorsqu'elle est comprise entre 59,9 cm et 60,1 cm.

$P(59,9 \le Y \le 60,1) = P\left(-\frac{0,1}{0,04} \le T \le \frac{0,1}{0,04}\right)$,

$P(59,9 \le Y \le 60,1) = 0,9876$.

c) Ces deux variables aléatoires sont supposées indépendantes donc

$P(99,9 \le X \le 100,1$ et $59,9 \le Y \le 60,1) = (0,9876)^2$,

$P(99,9 \le X \le 100,1$ et $59,9 \le Y \le 60,1) =$ **0,9753.**

2° a) Voir graphique page suivante.

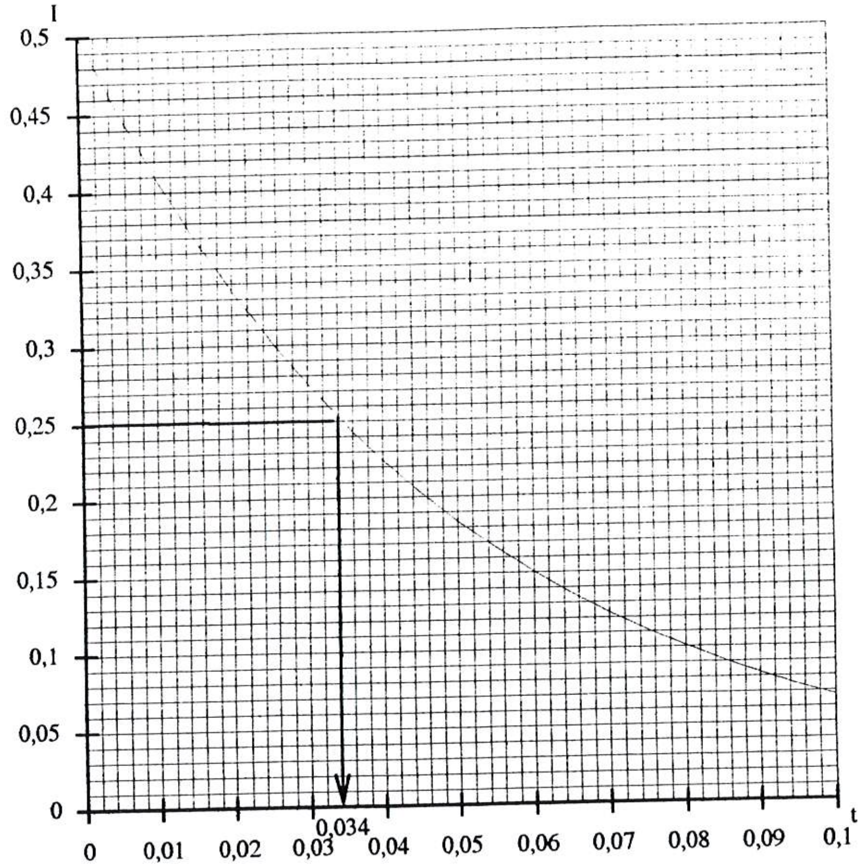
b) La calculatrice donne $\bar{x} = 55,7$ et $\bar{y} = 51,6$.

c) $r \approx 0,9836$, r est assez proche de 1, il y a corrélation entre x et y.

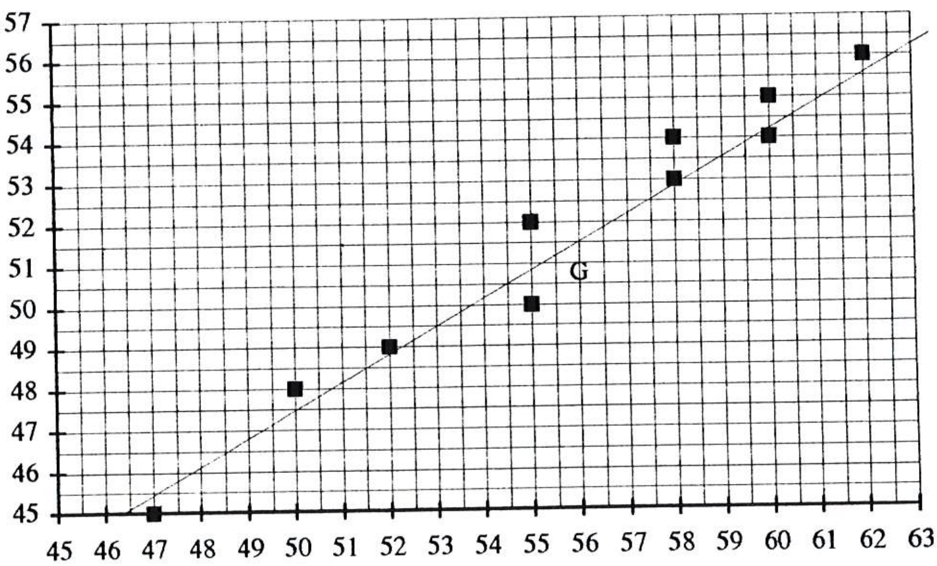
d) $a \approx 0,71299$ et $b \approx 11,886$ et avec la précision demandée **y = 0713 x + 11,886** à 10^{-3} près.

e) A la valeur x = 65 correspond la valeur y = 58,23 avec le procédé B l'épaisseur est 58,23.

EXERCICE 1



EXERCICE 2



CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1996

EXERCICE 1 (4 points)

Dans C, on considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - (\sqrt{3} + i)\,z + 1 = 0$.

(Le nombre i est le nombre complexe dont le module est égal à 1 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{2}$).

Cette équation possède deux racines complexes.

1. 1.1. Sans calculer les racines de (E), donner la valeur de leur produit.

   1.2. Déduire de la question précédente une relation entre les arguments des deux racines de (E).

2. 2.1. Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est égal à $(1 + i\sqrt{3})^2$.

   2.2. Déterminer les racines z_1 et z_2 de l'équation (E) ; on notera z_1 la racine dont la partie imaginaire est positive.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. L'axe des abscisses est noté (Ox) et celui des ordonnées (Oy).

   On appelle M_1, M_2 et I les points d'affixes respectives z_1, z_2 et i.

   3.1. Montrer que le point M_1 est un point de la droite d'équation $y = x$.

   3.2. Montrer que les points M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

   3.3. Construire le point M_1 puis, en utilisant la question 1, construire le point M_2.

EXERCICE 2

Une machine fabrique 10 000 pièces rectangulaires par jour. Une pièce est acceptable si la mesure, en millimètres, de sa longueur, appartient à l'intervalle [519,95 ; 522,45].

Une pièce acceptable procure un gain de 4 francs et une pièce défectueuse une perte de 60 francs.

On suppose que la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur exprimée en mm suit une loi normale de moyenne 521,2 et d'écart type σ.

1. Le 5 février la machine est réglée de sorte que $\sigma = 0{,}565$.

   1.1. Quelle est la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de cette journée soit acceptable. (On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près).

   1.2 On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée aléatoire telle que le 5 février, c'est à dire telle que $\sigma = 0{,}565$, associe son gain (positif ou négatif). Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de Y. Calculer son espérance mathématique E(Y).

   On désigne par Z la variable aléatoire somme de 10 000 variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Y. Calculer E(Z).

   Quel bénéfice peut espérer en moyenne l'entreprise le 5 février 1996 ?

   (On donnera la valeur arrondie à 1000 f près).

   1.3. Sans modifier la moyenne, quel aurait du être la valeur de l'écart type pour que le bénéfice B, qu'on peut en moyenne espérer une journée atteigne 32 000 francs ?

2. Chaque jour une intervention technique sur la machine permet, tout en conservant la même moyenne, de donner à l'écart type une valeur prise dans l'intervalle [0,4 ; 0,565].
   On désigne par δ la différence $(0{,}565 - \sigma)$. Le nombre δ représente la baisse de l'écart type relativement à la référence 0,565.
   Pour une journée donnée, on appelle profit journalier "espéré" de l'entreprise, exprimé en francs, la différence entre le bénéfice "espéré" B de la journée, exprimé en francs, et le coût C de l'intervention, exprimé en francs.
   L'expérience a montré que le profit journalier peut être apprécié, relativement à δ, par la fonction P définie sur l'intervalle [0 ; 0,165] par $P(\delta) = 10^3(100\,\delta - 5\,e^{8\delta} + 28)$.
   2.1. Déterminer la valeur de δ pour laquelle le profit journalier est maximum ; en déduire la valeur correspondante σ_0 de l'écart type.
   2.2. On se place dans le cas d'une journée où la valeur de l'écart type est σ_0. Calculer, la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de cette journée soit acceptable (on en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près).
   En déduire, comme au 1.2 le bénéfice B que peut espérer en moyenne l'entreprise en une telle journée et le coût C de l'intervention correspondante .
   (On donnera les valeurs arrondies de B et C à 1000 F près).

EXERCICE 3 (8 points)

PARTIE A :

Soit l'équation différentielle (E) : $x\,y' - y = \dfrac{2x^2}{2x+1}$

(y représente une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $]\,0\,, +\infty\,[$ et y' représente la fonction dérivée de y).

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $x\,y' - y = 0$.
   (où y représente une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $]\,0\,, +\infty\,[$ et y' représente la fonction dérivée de y).

2. Soit u une fonction de la variable réelle x, définie sur l'intervalle $]\,0, +\infty[$ dont la dérivée est notée u'. Montrer que si, pour tout x de l'intervalle $]\,0\,, +\infty\,[$, $u'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$ alors la fonction g définie sur l'intervalle $]\,0\,, +\infty\,[$ par $g(x) = x.u(x)$ est une solution particulière de l'équation (E).

3. Donner une solution particulière de l'équation différentielle (E).

4. Donner la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant $h(1) = \ln 3$.

PARTIE B :

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, par $f(x) = x\ln(2x+1)$.

1. Calculer la limite de f(x) quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ et la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.

2. f ' désigne la fonction dérivée première de f et f " sa fonction dérivée seconde.

   2.1. Pour tout x de l'intervalle $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, calculer f '(x) et f "(x).

   2.2. Calculer f '(0). En déduire, pour tout x de l'intervalle $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, le signe de f '(x).

   2.3. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

3. 3.1. Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \ln(1+2x)$.
   (On pourra utiliser le formulaire).

   3.2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
   On note C et P les courbes représentant, dans ce plan, respectivement la fonction f et la fonction $x \longmapsto 2x^2$ définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

   4.1. Préciser les positions relatives de C et P au voisinage du point O.

   4.2. Tracer les courbes C et P.

5. Sur le graphique précédent, on considère le domaine D constitué par les points de coordonnées (x,y) telles que : $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ f(x) < y \le 2x^2 \end{cases}$

   On se propose de calculer l'aire A de D.

   5.1 Calculer les réels a, b, c tels, que pour tout x réel de l'intervalle $]-\frac{1}{2}, +\infty[$,

   $$\frac{x^2}{2x+1} = ax + b + \frac{c}{2x+1}.$$

   5.2 Déduire de la question précédente (5.1) la valeur exacte de l'intégrale : $\int_0^2 \frac{x^2}{2x+1}\,dx$.

   5.3. Par une intégration par parties, montrer que : $\int_0^2 x.\ln(2x+1)\,dx = 2\ln 5 - \int_0^2 \frac{x^2}{2x+1}\,dx$.

   5.4. Calculer l'aire A de D. Donner la valeur arrondie de A au mm^2.

EXERCICE 1

1.1 Le produit des racines de l'équation (E) :

$z^2 - (\sqrt{3} + i)z + 1 = 0$ est donné par le rapport $\frac{c}{a} = 1$.

1.2. 1 est un nombre réel strictement positif, il a pour argument 0 à 2π près. On sait que l'argument d'un produit de deux nombres complexes non nuls est égal à la somme des arguments de ces deux nombres.

On en déduit $\mathrm{Arg}\, z_1z_2 = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$ et $\mathrm{Arg}\, z_1z_2 = 0$.

conclusion $\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 = 0$ à 2π près.

2.1. $\Delta = (\sqrt{3} + i)^2 - 4$, en développant on obtient :

$\Delta = -2 + 2i\sqrt{3}$ or $(1 + i\sqrt{3})^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ donc

$\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2$

2.2. $z_1 = \dfrac{\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}(1 + i)$,

$z_2 = \dfrac{\sqrt{3} + i - 1 - i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$.

3.1 M_1 a pour abscisse $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$ et pour ordonnée $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$; ces deux nombres étant égaux, M_1 est un point de la droite d'équation $y = x$.

3.2. On cacule IM_1 et IM_2.

On sait que $IM_1 = |z_1 - i|$, $IM_2 = |z_2 - i|$,

$z_1 - i = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$,

$|z_1 - i|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2$,

$|z_1 - i|^2 = \dfrac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1}{4}$,

$|z_1 - i|^2 = 2$, $|z_1 - i| = \sqrt{2}$; on a donc $IM_2 = \sqrt{2}$ le point M_1 appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

De même $z_2 - i = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} + i\,\dfrac{-\sqrt{3} - 1}{2}$,

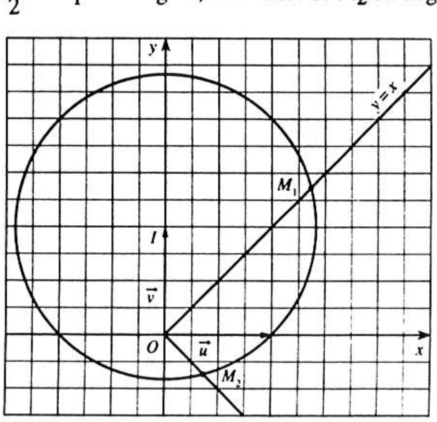
$|z_2 - i|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2$, on retrouve les mêmes calculs et la même conclusion que pour z_1 et pour M_1.

3.3. Le point M est le point commun à la droite d'équation $y = x$, d'après (3.1), et au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$ d'après (3.2), dont l'ordonnée est positive d'après la définition de z_1 figurant au (2.2).

D'après (1.2), $(\vec{u}, \vec{OM_2}) = -(\vec{u}, \vec{OM_1})$ à 2π près.

Donc M_2 se trouve sur la droite symétrique de(OM_1) par rapport à l'axe des abscisses.

M_2 se trouve aussi sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$ d'après(3.2). Enfin z_2 ayant pour partie imaginaire $\dfrac{-\sqrt{3} + 1}{2}$ qui est négatif, l'ordonnée de M_2 est négative.



EXERCICE 2

1. $\sigma = 0{,}565$. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(521{,}2 ; 0{,}565)$, la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 521{,}2}{0{,}565}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.1. $P(519{,}95 \le X \le 522{,}45) = P\left(-\dfrac{1{,}25}{0{,}565} \le T \le \dfrac{1{,}25}{0{,}565}\right)$

$P(519{,}95 \le X \le 522{,}45) = P(-2{,}21 \le T \le 2{,}21)$,

$P(519{,}95 \le X \le 522{,}45) = 2\,\pi(2{,}21) - 1$,

$P(519{,}95 \le X \le 522{,}45) = 0{,}97$ à 10^{-2} près.

La probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit acceptable est **0,97** à 10^{-2} près.

1.2 La loi suivie par la variable Y est :

y_i en francs	4	– 60
$P(Y = y_i)$	0,97	0,03

$E(Y) = 4 \times 0{,}97 - 60 \times 0{,}03 = 2{,}08$.

Z est la somme de 10 000 variables aléatoires de même espérance mathématique 2,08 donc $E(Z) = 10\,000 \times 2{,}08$, $E(Z) = 20\,800$. Le bénéfice moyen que peut espérer l'entreprise une telle journée si on considère un très grand nombre de journées du même type est donc de **20 800 francs ou 21 000** à 1000 f près.

1.3. Si on modifie l'écart type la probabilité qu'une pièce soit acceptable est modifiée. Si on désigne par p cette probabilité l'espérance mathématique de Y devient :

$E(Y) = 4p - 60(1 - p)$, $E(Y) = 64p - 60$ et l'espérance mathématique de Z est $10\,000(64p - 60)$, elle atteint 32 000 pour $64p - 60 = 3{,}2$ qui équivaut à

$16p - 15 = 0{,}8$ et à $16p = 15{,}8$ et à $p = \mathbf{0{,}9875}$.

La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(521{,}2 ; \sigma)$, la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 521{,}2}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$. $p = P(519{,}95 \le X \le 522{,}45)$,

$0{,}9875 = P\left(-\dfrac{1{,}25}{\sigma} \le T \le \dfrac{1{,}25}{\sigma}\right)$, $2\,\pi\left(\dfrac{1{,}25}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}9875$,

$\pi\left(\dfrac{1{,}25}{\sigma}\right) = 0{,}99375$, on trouve dans la table du formulaire

$\dfrac{1{,}25}{\sigma} \approx 2{,}5$, $\sigma \approx 0{,}5$. L'écart type $\sigma = \mathbf{0{,}5}$ permet d'espérer atteindre un bénéfice moyen de 32 000 francs.

2.1. Sur l'intervalle [0 ; 0,165] :

$P(\delta) = 10^3(100\delta - 5e^{8\delta} + 28)$,

$P'(\delta) = 10^3(100 - 40e^{8\delta})$,

$P'(\delta) = 10^4(10 - 4e^{8\delta})$, $P'(\delta)$ est du signe de

$10 - 4e^{8\delta}$ donc admet un maximum pour $e^{8\delta} = 2{,}5$

soit $\delta = \dfrac{\ln 2{,}5}{8}$ on en déduit $\sigma = 0{,}565 - \delta$,

$\sigma_0 = 0{,}565 - \dfrac{\ln 2{,}5}{8}$, $\sigma_0 = \mathbf{0{,}450}$ **à** 10^{-3} **près.**

2.2 $\sigma = \mathbf{0{,}450}$. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(521{,}2 ; 0{,}45)$, la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 521{,}2}{0{,}45}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$P(519{,}95 \le X \le 522{,}45) = P\left(-\dfrac{1{,}25}{0{,}45} \le T \le \dfrac{1{,}25}{0{,}45}\right)$

$P(519{,}95 \le X \le 522{,}45) = P(-2{,}778 \le T \le 2{,}778)$,

$P(519{,}95 \le X \le 522{,}45) = 2\,\pi(2{,}778) - 1$,

$P(519{,}95 \le X \le 522{,}45) = 0{,}9946$.

La probabilité qu'une pièce prélevée au hasard ce 7 février soit acceptable est **0,995** à 10^{-3} près.

La probabilité qu'une pièce soit acceptable est modifiée, si on désigne par p cette probabilité, l'espérance mathématique de Y devient : $E(Y) = 4p - 60(1 - p)$, $E(Y) = 64p - 60$ et l'espérance mathématique de Z est $10\,000(64p - 60)$,
$E(Z) = 10\,000(4 \times 0{,}995 - 60 \times 0{,}005)$, $E(Z) = 36\,8000$.
A 1000 francs près, on peut espérer un bénéfice moyen de **37000 francs** si on considère un très grand nombre de jour où $\sigma = 0{,}450$.
Par suite on peut espérer un profit :

$$P\left(\frac{\ln 2{,}5}{8}\right) = 10^3\left(100\,\frac{\ln 2{,}5}{8} - 5 \times 2{,}5 + 28\right),$$

$$P\left(\frac{\ln 2{,}5}{8}\right) \approx 26\,954 \quad P = 27000 \text{ f à } 1000 \text{ f près,}$$

à 1000 f près **B = 37 000 F et C = 10 000 F.**

EXERCICE 3

Partie A

1) L'équation $xy' - y = 0$ est de la forme $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$. Toutes les solutions de cette équation sont donc définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = K e^{-G(x)}$ où K est une constante réelle et G une primitive de $\frac{b}{a}$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $\frac{b(x)}{a(x)} = -\frac{1}{x}$ d'où $G(x) = -\ln x$,
$f(x) = K e^{\ln x}$, $\mathbf{f(x) = K\,x.}$

2) Soit u telle que $u'(x) = \frac{2}{2x+1}$ et $g(x) = x.\,u(x)$

$g'(x) = u(x) + x.\,u'(x)$, $g'(x) = u(x) + \frac{2x}{2x+1}$,

$x\,g'(x) - g(x) = x.\,u(x) + \frac{2x^2}{2x+1} - x.\,u(x)$.

Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $x\,g'(x) - g(x) = \frac{2x^2}{2x+1}$

Donc g est solution particulière de (E).
3) Une solution particulière de (E) est donc :
$x \longmapsto \mathbf{x.\ \ln(2x+1)}$.
4) L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par
$\mathbf{h(x) = x.\ \ln(2x+1) + K.\ x}$ où K est une constante réelle quelconque.
$h(1) = \ln 3$ se traduit par $\ln 3 + K = \ln 3$, $K = 0$,
$\mathbf{h(x) = x.\ \ln(2x+1)}$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to -0{,}5^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2.1 $f'(x) = \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}$,

$f''(x) = \frac{2}{2x+1} + \frac{2}{2x+1} - \frac{4x}{(2x+1)^2}$,

$f''(x) = \frac{4(2x+1) - 4x}{(2x+1)^2}$, $f''(x) = \frac{4(x+1)}{(2x+1)^2}$.

2.2 $f'(0) = 0$ et $f''(x) > 0$, f' est strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et nulle en 0 donc $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$, d'où le tableau de variation :

2.3

x	− 0,5		0		+∞
f '(x)		−	0	+	
f(x)	+ ∞	↘	0	↗	+∞

3.1 A l'aide du formulaire on trouve les développements limités au voisinage de 0, à l'ordre 3 suivants :

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$,

$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

3.2 $f(x) = 2x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

4.1 $f(x) - 2x^2 = -2x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

La différence entre les ordonnées des points de même abscisse voisine de zéro est $y_C - y_P = -2x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, $y_C - y_P$ est du signe de $-x$,
si $x > 0$ alors $y_C - y_P < 0$ alors P est au dessus de C,
si $x < 0$ alors $y_C - y_P > 0$ alors P est au dessous de C.

5.1 Sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $\frac{x^2}{2x+1} = ax + b + \frac{c}{2x+1}$ équivaut à $x^2 = (ax+b)(2x+1) + c$ donc $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$

d'où $\quad \frac{x^2}{2x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x+1)}$.

5.2 $I = \int_0^2 \frac{x^2}{2x+1})\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(2x+1)\right]_0^2$

$$\mathbf{I = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\ln 5}$$

5.3 $J = \int_0^2 x\ln(1+2x))\,dx$

En posant $u'(x) = x$, $\quad v(x) = \ln(2x+1)$,
$u(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad v'(x) = \frac{2}{2x+1}$,

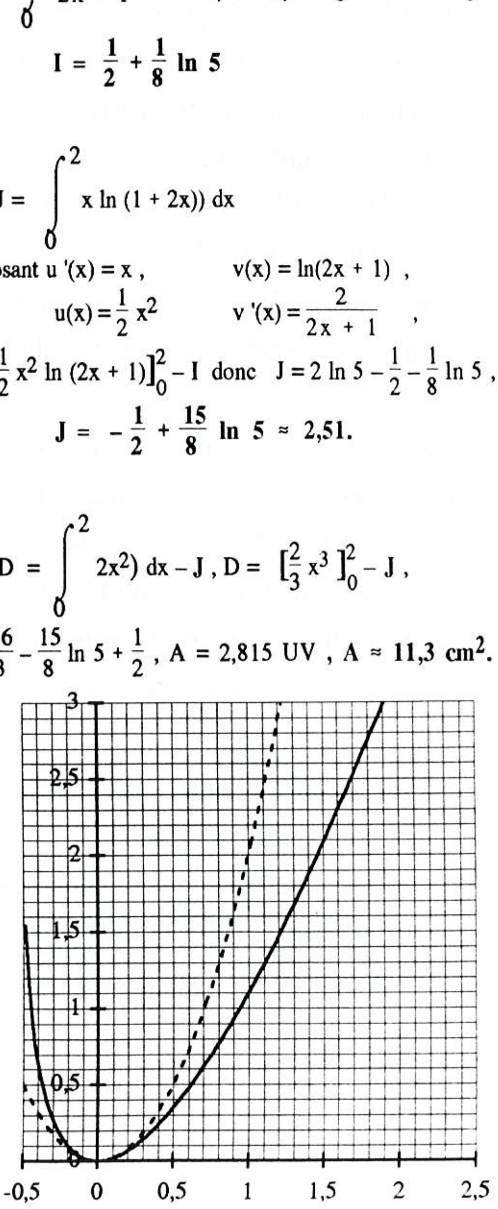
$J = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(2x+1)\right]_0^2 - I$ donc $J = 2\ln 5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\ln 5$,

$$\mathbf{J = -\frac{1}{2} + \frac{15}{8}\ln 5 \approx 2{,}51.}$$

5.4 $D = \int_0^2 2x^2)\,dx - J$, $D = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 - J$,

$A = \frac{16}{3} - \frac{15}{8}\ln 5 + \frac{1}{2}$, **A = 2,815 UV**, **A ≈ 11,3 cm².**

4.2



CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1997

EXERCICE 1 (4 points)

On considère les équations différentielles (E_0) et (E) suivantes :

(E_0) : $x y' + y = 0$

(E) : $x y' + y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ où y représente une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et y' représente la fonction dérivée de la fonction y.

1 - Résoudre l'équation différentielle (E_0).

2 - Vérifier que la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\text{Arctan } x}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

3 - Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4 - Déterminer la solution f de (E) qui satisfait la condition $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 (9 points)

Du point de vue des calculs à effectuer, les parties 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

Le but de cet exercice est de calculer la durée de vie moyenne d'ampoules électriques issues de deux productions différentes.

Dans la partie 1) la durée de vie d'une ampoule de la production A définit une variable aléatoire X qui suit une loi normale.

Dans la partie 2) la durée de vie d'une ampoule de la production B définit une variable aléatoire Y dont on sait calculer l'espérance mathématique.

PARTIE 1 :

Dans cette partie, on désigne par X la variable aléatoire qui à toute ampoule *prise au hasard dans* la production A associe la mesure, en heure, de sa durée de vie.

X suit *une* loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, de moyenne m et d'écart type σ.

1-1. Les résultats concernant les durées de vie des ampoules d'un échantillon aléatoire (e) de 100 ampoules ont été consignés par le constructeur dans le tableau suivant :

Durée de vie (en heure)	[1100, 1200[	[1050, 1100[	[1000, 1050[	[950, 1000[	[750, 950[	[500, 750[
Nombre d'ampoules	10	23	29	27	6	5

En assimilant chaque mesure relevée au centre de la classe à laquelle elle appartient, on obtient la série statistique suivante .

Valeur de la variable x_i	1150	1075	1025	975	850	625
Effectif n_i	10	23	29	27	6	5

Déterminer les valeurs, arrondies à l'unité, de la moyenne et de l'écart type de cette série statistique.

On note $\overline{X}$, la variable aléatoire qui à chaque échantillon aléatoire de 100 ampoules de la production A associe la mesure, en heure, de la durée de vie moyenne des ampoules de l'échantillon. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler tout échantillon de 100 ampoules à un échantillon de 100 ampoules prélevé avec remise.
En admet que la variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne m inconnue et d'écart type $\frac{112}{\sqrt{100}}$.

1-2. On veut construire un test bilatéral permettant, à la suite du prélèvement au hasard d'un échantillon de 100 ampoules dans la production, de tester au seuil de signification 5 %, l'hypothèse selon laquelle la durée de vie moyenne des ampoules de la production est m = 1000 heures. Pour celà :

1-2-1- Préciser l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1.

1-2-2- Quelle est sous l'hypothèse nulle H_0, la loi de la variable aléatoire $\overline{X}$?
Déterminer le réel positif h tel que $P(1000 - h \leq \overline{X} \leq 1000 + h) = 0{,}95$.

1-2-3- Enoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

1-2-4- Utiliser ce test avec l'échantillon ci-dessus et conclure.

1-3. On suppose dans cette question que m = 1000 et $\sigma = 112$.

1-3-1- Calculer la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit supérieure à 1000 heures.

1-3-2- Calculer la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit inférieure à 900 heures.

PARTIE 2 :

Soient le nombre réel strictement positif a et f la fonction, de la variable réelle t, définie sur |R par

$$\begin{cases} \text{si } t \geq 0 \text{ alors } f(t) = a\,e^{-at} \\ \text{si } t < 0 \text{ alors } f(t) = 0 \end{cases}$$

2-1-1- Montrer que, pour tout t de |R, $f(t) \geq 0$.

2-1-2- Pour tout réel strictement positif, calculer, en fonction de x et de a, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{, en déduire } \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

2-2- Calculer à l'aide d'une intégration par parties, en fonction de x et de a, l'intégrale

$$J(x) = \int_0^x t\,f(t)\,dt \text{, en déduire } \lim_{x \to +\infty} J(x).$$

2-3- Soit Y la variable aléatoire qui *à* toute ampoule prélevée au hasard dans la production de B associe la mesure, en heure, de sa durée de vie. On admet que la mesure, en heure, de la durée de vie moyenne des ampoules de la production B est l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y notée E(Y) et vérifiant $E(Y) = \lim_{x \to +\infty} J(x)$.

2-3-1- Exprimer E(Y) en fonction de a.

2-3-2- Quelle doit être la valeur de a pour que la durée de vie moyenne des ampoules de la production B soit égale à 1000 heures. Dans ce cas, pour tout réel positif, exprimer f(t) en fonction de t.

EXERCICE 3 (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (Ox, Oy) d'unité graphique 1 cm, on considère la courbe C ensemble de tous les points M de coordonnées (x, y) telles qu'il existe au moins un nombre t de l'intervalle [0, 1] de sorte que :

$$\begin{cases} x = 60\,t\,(1-t) \\ y = 30\,t^2\,(1-t) \end{cases}$$

Le tracé de la courbe C est donnée sur la feuille annexe.

1 - On note f et g les fonctions de la variable réelle t définies sur l'intervalle [0, 1] par :

$$f(t) = 60\,t\,(1-t)$$
$$g(t) = 30\,t^2\,(1-t)$$

Etudier le sens de variation de f et de g et rassembler les résultats dans un unique tableau dans lequel on fera apparaître les valeurs de f(t) et g(t) pour $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{2}{3}$ et $t = 1$ (on indiquera les valeurs exactes).

2-1- Préciser les valeurs des coefficients directeurs des demi-tangentes à la courbe C au point O.

2-2- On note M_1 le point de C où la tangente à C est parallèle à (Oy).
Préciser les coordonnées (x_1, y_1) du point M_1.

2-3- On note M_2 le point de C où la tangente à C est parallèle à (Ox).
Préciser les coordonnées (x_2, y_2) du point M_2.

2-4- Construire sur la figure de l'annexe la tangente D_1 à C au point M_1 et la tangente D_2 à la courbe C au point M_2.

2-5- On note M_0 le point de C de coordonnées $(f(\frac{1}{3}), g(\frac{1}{3}))$ et D_0 la tangente à la courbe C au point M_0. Calculer les coordonnées de M_0 ainsi que le coefficient directeur de D_0.
Construire sur la figure de l'annexe, la droite D_0.

3- On note : Q le point d'intersection de l'axe (Ox) et de la droite D_0.
R le point d'intersection de la droite D_0 et de la droite D_2.
S le point d'intersection de la droite D_2 et de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

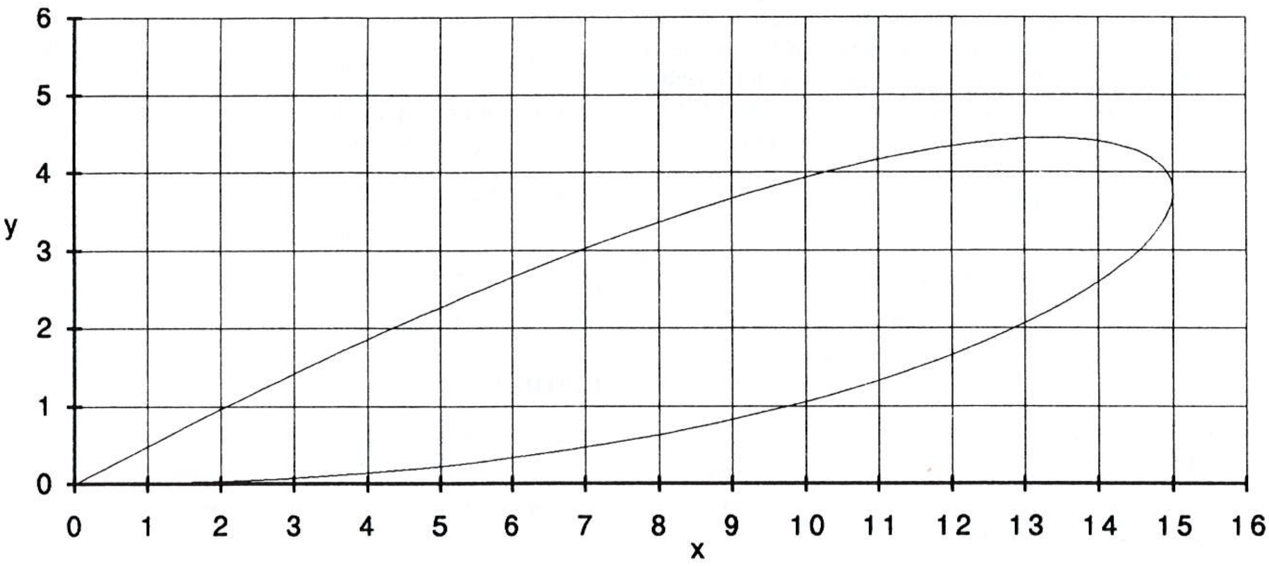
3-1- Démontrer que le quadrilatère (OQRS) est un parallélogramme. Démontrer que la droite (QS) est parallèle à l'axe (Oy).

3-2- Exprimer, en cm^2, l'aire du parallélogramme (OQRS). On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au mm^2.

4- On admet que l'aire du domaine D limité par la courbe C a pour mesure, en cm^2, le nombre réel

$\frac{1}{2}\int_0^1 [f(t)\,g'(t) - f'(t)\,g(t)]\,dt$ (dans cette formule f ' et g' désignent respectivement les fonctions dérivées des fonctions f et g). Calculer la valeur exacte de l'aire de D.

ANNEXE



EXERCICE 1

(E_0) : $x y' + y = 0$. On sait que la solution générale de l'équation $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ est définie par :

$y(x) = Ce^{-K(x)}$, où K(x) est une primitive de la fonction $\frac{b(x)}{a(x)}$, et C est une constante réelle arbitraire.

Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ est $\ln x$. On en déduit que la solution générale est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$y(x) = Ce^{-\ln x}$, $y(x) = \frac{C}{x}$ où C est une constante réelle quelconque.

2. Pour tout nombre réel $x > 0$, on a $h(x) = \frac{\text{Arctan } x}{x}$,

d'où $h'(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\text{Arctan } x}{x^2}$, on en déduit :

$x\,h'(x) + h(x) = \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{\text{Arctan } x}{x} + \frac{\text{Arctan } x}{x}$,

$x\,h'(x) + h(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$, la fonction h est donc une solution particulière de l'équation (E).

3. La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E_0). La solution générale de l'équation (E) est donc définie sur $]0,+\infty[$ par : $y(x) = \frac{\text{Arctan } x}{x} + \frac{C}{x}$, où C est une constante réelle quelconque.

4. $f(1) = \frac{\pi}{2}$ donne $\text{Arctan } 1 + C = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

donc $C = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{x} + \frac{\pi}{4x}$.

EXERCICE 2

PARTIE 1

1-1- La moyenne de l'échantillon est $\overline{x_e} = 1005$, l'écart type arrondi à l'unité est $\sigma_e = 111$.

1-2-1- L'hypothèse H_0 est $m = 1000$, l'hypothèse H_1 est $m \neq 1000$.

1-2-2 Sous l'hypothèse H_0, $m = 1000$, $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(1000\,;\frac{112}{\sqrt{100}})$ soit $\mathcal{N}(1000\,; 11{,}2)$ et

$T = \frac{\overline{X} - 1000}{11{,}2}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(1000 - h \leq \overline{X} \leq 1000 + h) = 0{,}95$ équivaut à

$P(-\frac{h}{11{,}2} \leq T \leq \frac{h}{11{,}2}) = 0{,}95$ soit encore à

$2\pi(\frac{h}{11{,}2}) - 1 = 0{,}95.$

La table donne $\frac{h}{11{,}2} = 1{,}96$ d'où $h \approx 21{,}952$ soit $h = 22$ à une unité près et

$\mathbf{P(978 \leq \overline{X} \leq 1022) = 0{,}95.}$

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle I = [978 ; 1022] soit 5% de chance que cette moyenne soit à l'extérieur de I.

1-2-3- On prélève un échantillon aléatoire, non exhaustif, de taille 100. On calcule la moyenne $\overline{x}$ des durées de vie des ampoules de cet échantillon.

si $\overline{x} \in I$ on accepte H_0 et on rejette H_1

si $\overline{x} \notin I$ on accepte H_1 et on rejette H_0

1-2-4- Utilisation du test : $\overline{x} = 1005$

$1005 \in [978\,; 1022]$ on accepte H_0 on rejette H_0

On conclut, au seuil de signification 5%, que la durée de vie moyenne des ampoules de la production est bien 1000 heures .

1-3- La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (1000 ; 112) ; la variable aléatoire $T = \frac{X - 1000}{112}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1-3-1- $P(X \geq 1000) = P(T \geq 0) = 0{,}5$,

1-3-2 $P(X \leq 900) = P(T \leq -\frac{100}{112})$,

$P(X \leq 900) = P(T \leq -0{,}892)$,

$P(X \leq 900) = 1 - \pi(0{,}892)$,

$P(X \leq 900) = 1 - 0{,}8133$,

$P(X \leq 900) = 0{,}1867$.

PARTIE 2

1-1 - $\begin{cases} \text{si } t \geq 0 \text{ alors } f(t) = a\,e^{-a\,t} \\ \text{si } t < 0 \text{ alors } f(t) = 0 \end{cases}$

$a > 0$ et pout tout t de $\mathbb{R}$, $e^{-a\,t} > 0$ donc $f(t) \geq 0$.

1-2- $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F(x) = \left[-e^{-a\,t}\right]_0^x$,

$F(x) = 1 - e^{-a\,x}$, $a>0$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-a\,x} = 0$,

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

2- $J(x) = \int_0^x t\,f(t)\,dt$, on intègre par parties en posant :

$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = a\,e^{-a\,t} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-a\,t} \end{cases}$

$$J(x) = [-\,te^{-at}]_0^x - \int_0^x -e^{-at}\,dt\ ,$$

$$J(x) = [-\,t\,e^{-at} - \frac{e^{-at}}{a}]_0^x ,$$

$$J(x) = -\,x\,e^{-ax} - \frac{1}{a}e^{-ax} + \frac{1}{a}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} x\,e^{-ax} = 0\ ,$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = \frac{1}{a}$.

3 - 1 - $E(Y) = \lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = \frac{1}{a}$.

3- 2 - $E(Y) = 1000$ équivaut à $\frac{1}{a} = 1000$ et à $a = 0{,}001$.

Si $a = 1000$ alors $f(t) = 0{,}001\ e^{-0{,}001\,t}$.

EXERCICE 3

1- $f(t) = 60\,t\,(1 - t)$ $\quad f'(t) = 60(1 - 2t)$

$g(t) = 30\,t^2\,(1 - t)$ $\quad g'(t) = 30\,t\,(2 - 3t)$.

t	0		1/2	2/3		1
f '(t)	60	+	0		−	− 60
f(t)	0	$\nearrow$	15		$\searrow$	0
g'(t)	0	$\nearrow$		40/9	$\searrow$	0
g '(t)	0	+		0	−	− 30

2-1- Les coefficients directeurs des demi-tangentes à la courbe C au point O(0, 0) sont $\frac{g'(0)}{f'(0)} = 0$ et $\frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{1}{2}$.

2-2- M_1 le point de C où la tangente à C est parallèle à (Oy) est tel que $f'(t) = 0$ donc tel que $t = \frac{1}{2}$, les coordonnées du point M_1 sont $f(\frac{1}{2}) = 15$, $g(\frac{1}{2}) = 3{,}5$, $M_1(15\ ;\ 3{,}5)$.

2-3- M_2 le point de C où la tangente à C est parallèle à (Ox) est tel que $\frac{g'(t)}{f'(t)} = 0$ donc tel que $t = 0$ ou $t = \frac{2}{3}$; $t = 0$ correspond au point O. Les coordonnées du point M_2 sont $f(\frac{2}{3}) = \frac{40}{3}$, $g(\frac{2}{3}) = \frac{40}{9}$, $M_2(\frac{40}{3}\ ;\ \frac{40}{9})$.

2-4- voir figure ci-après.

2-5- $f(\frac{1}{3}) = \frac{40}{3}$, $g(\frac{1}{3}) = \frac{20}{9}$, $M_0(\frac{40}{3}\ ;\ \frac{20}{9})$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point M_0 est $\dfrac{g'(\frac{1}{3})}{f'(\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}$.

Une équation de D_0 est alors $y = \frac{1}{2}x - \frac{40}{9}$.

3- Le point Q est l'intersection de l'axe (Ox) et de la droite D_0 donc ses coordonnées vérfient

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{40}{9} \end{cases} \quad \text{donc } Q(\frac{80}{9}, 0).$$

Le point R est l'intersection de la droite D_0 et de la droite D_2 donc ses coordonnées vérfient

$$\begin{cases} y = \frac{40}{9} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{40}{9} \end{cases} \quad \text{donc } R(\frac{160}{9}, \frac{40}{9}).$$

Le point S est l'intersection de la droite D_2 et de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ donc ses coordonnées vérfient

$$\begin{cases} y = \frac{40}{9} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \quad \text{donc } S(\frac{80}{9}, \frac{40}{9}).$$

3-1- Les droites D_0 et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ ont le même coefficient directeur $\frac{1}{2}$, elles sont parallèles ; la droite D_2 est parallèle à l'axe des abscisses, le quadrilatère (OQRS) ayant ses côtés deux à deux parallèles est un parallélogramme. Les points Q et S ont la même abscisse $\frac{80}{9}$ donc la droite (QS) est parallèle à l'axe (Oy).

3-2- Le parallélogramme (OQRS) a pour hauteur $QS = \frac{40}{9}$ et $OQ = \frac{80}{9}$ comme côté perpendiculaire à QS ; l'aire de ce parallèlogramme est donc $\frac{40}{9} \cdot \frac{80}{9} = \frac{3200}{81}$ cm^2 la valeur arrondie au mm^2 est 39,51 cm^2.

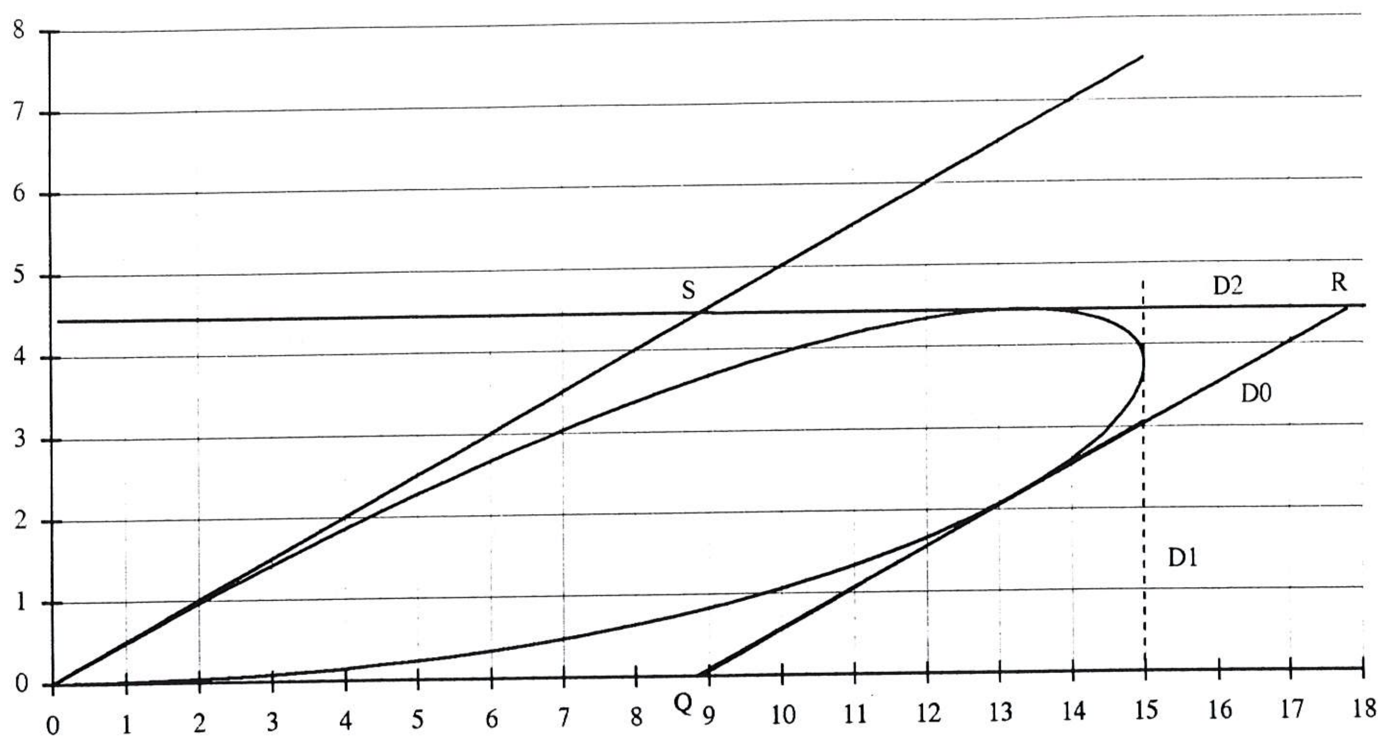
4- L'aire cherchée est $A = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 [f(t)\,g'(t) - f'(t)\,g(t)]\,dt$,

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 [1800\,t^2(1-t)(2-3t) - 1800\,t(1-t)(1-2t)]\,dt$$

$$A = 900\int_0^1 (t^4 + t^2 - 2t^3)\,dt = 900\,[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^4}{4}]_0^1$$

,

$$A = 900(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}] = \frac{900}{30},\quad A = 30\ cm^2.$$


S
D2
R
D0
D1
Q
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

MICROTECHNIQUES

MICROTECHNIQUES

1996

EXERCICE 1 (12 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

A. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$$

y étant une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$ est une solution particulière de (E).
   En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par les points $I(-1, 0)$ et $J(0, \frac{1}{2})$.

B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x}$.

On désignera par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative de f dans le plan P.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et celle de f en $-\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Etudier les variations de f.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan P.

4. On désigne par A l'aire en cm^2, de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
   Calculer la valeur exacte de A puis en donner une valeur approchée par excès au mm^2 près.
   NB : On pourra utiliser deux intégrations par parties successives.

EXERCICE 2 (8 points)

Les parties A et B de l'exercice sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, on donnera les valeurs approchées des probabilités à 10^{-3} près.

Une usine de produits pharmaceutiques produit, en grande quantité, des comprimés.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout comprimé pris au hasard dans la production associe sa masse exprimée en grammes. X suit la loi normale de moyenne 1,200 et d'écart type 0,010.

Partie A

1. Quelle est la probabilité que la masse d'un comprimé, pris au hasard dans la production appartienne à l'intervalle [1,180 ; 1,220] ?

2. Trouver le réel positif α tel que la proportion de comprimés ayant une masse comprise entre $1{,}200 - \alpha$ et $1{,}200 + \alpha$ soit de 64 %.

Partie B

Un comprimé est dit conforme si sa masse appartient à l'intervalle [1,180 ; 1,220].
La probabilité qu'un comprimé soit non conforme est supposée égale à 0,05.
On prélève au hasard un échantillon de n comprimés, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise.
On désigne par Y la variable aléatoire qui associe, à chaque échantillon prélevé, le nombre de comprimés non conformes dans cet échantillon.

1. On prend : $n = 20$.
   a. Montrer que Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}$ (n, p). Déterminer les paramètres n et p.
   b. Calculer : $P(Y \geq 1)$.

2. On prend $n = 100$.
   a. On admet que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer λ.
   b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 3 comprimés non conformes.

EXERCICE 1 :

A.1. (E') : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique de (E') est : $r^2 + 4r + 4 = 0$ c'est à dire $(r+2)^2 = 0$; elle admet -2 comme solution double. Toutes les solutions de l'équation différentielle (E') sont donc définies sur |R par : $f(x) = (C_1 x + C_2)\, e^{-2x}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.

2. Pour tout x de |R, soit $g(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$,

$g'(x) = x e^{-2x} - x^2 e^{-2x}$ et

$g''(x) = e^{-2x} - 2x e^{-2x} - 2x e^{-2x} + 2x^2 e^{-2x}$ donc

$g''(x)+4g'(x)+4g(x) = (1-4x+2x^2+4x-4x^2+2x^2)e^{-2x}$

$g''(x)+4g'(x)+4g(x) = e^{-2x}$, ce qui établit que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$ est solution de (E).

3. La solution générale y de l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale y de l'équation sans second membre associée, soit :

$y(x) = (C_1 x + C_2 + \frac{1}{2} x^2)\, e^{-2x}$, où C_1 et C_2 sont deux nombres réels quelconques.

4. La fonction h solution de (E) vérifie $h(-1) = 0$ et $h(0) = -\frac{1}{2}$ d'où $-C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$

$C_2 = \frac{1}{2}$ et $C_1 = 1$.

La fonction h cherchée est définie sur |R par :

$h(x) = (\frac{1}{2} x^2 + x + \frac{1}{2})\, e^{-2x}$, $\mathbf{h(x) = \frac{1}{2}\ (x + 1)^2 e^{-2x}}$.

B. 1. f est définie sur |R par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$

a) De $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ on déduit

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (règle du produit).

$f(x) = [(x+1)\, e^{-x}]^2$.

De $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$,

en utilisant $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$, on déduit

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b) Pour tout x de |R, f est dérivable et

$f'(x) = (x+1)\, e^{-2x} - (x+1)^2 e^{-2x}$,

$f'(x) = -x\,(x+1)\, e^{-x}$.

Pour tout x de |R, $e^{-2x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-x\,(x+1)$ qui admet pour racines -1 et 0,

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$0{,}5$	↘	0

3. Voir page suivante.

4. $A = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x}\, dx$ car

$f(x) > 0$ sur $[-1, 0]$.

En posant $u(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$, $v'(x) = e^{-2x}$,

on obtient : $u'(x) = x + 1$, $v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$,

en intégrant par parties :

$$A = \left[-\frac{1}{4}(x+1)^2 e^{-2x}\right]_{-1}^{0} + \pi \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}(x+1)\, e^{-2x}\, dx \ ;$$

en posant $u(x) = x + 1$, $v'(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}$,

on obtient : $u'(x) = 1$, $v(x) = -\frac{1}{4} e^{-2x}$,

en intégrant par parties :

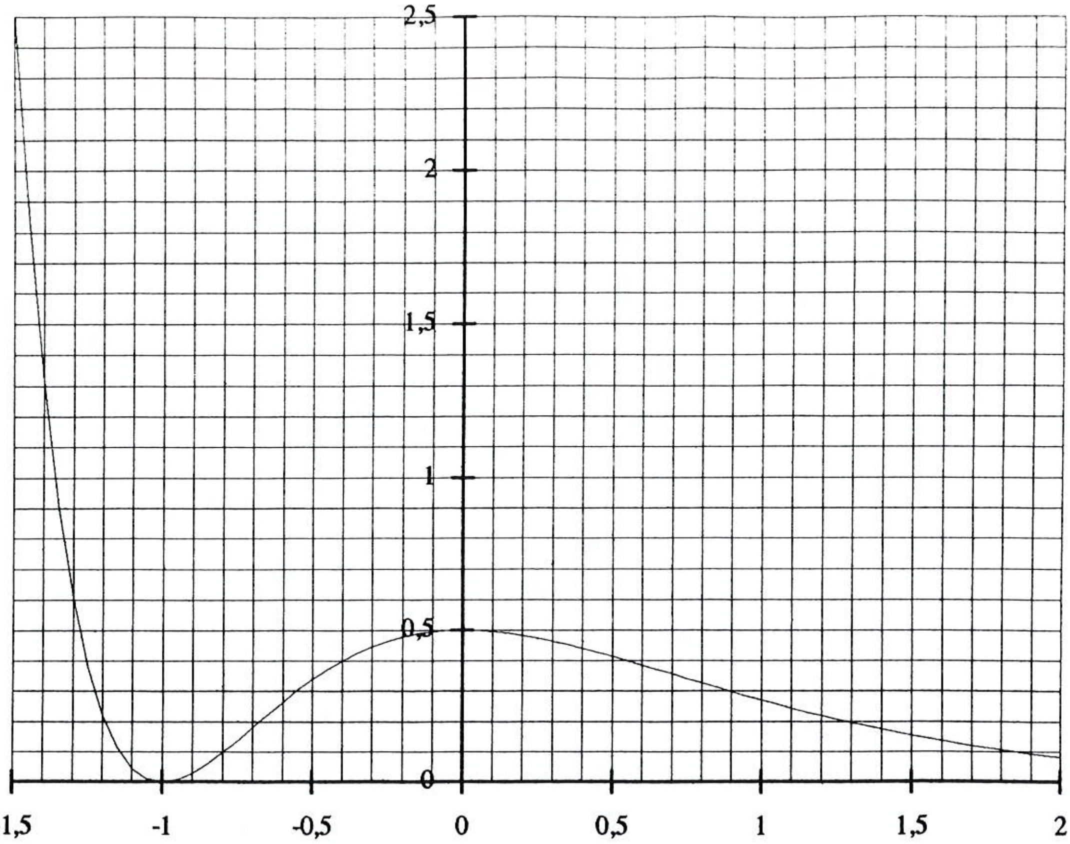
$$A = \left[-\frac{1}{4}(x+1)\, e^{-2x} - \frac{1}{4}(x+1)\, e^{-2x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{1}{4} e^{-2x}\, dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{4}(x+1)\, e^{-2x} - \frac{1}{4}(x+1)\, e^{-2x} - \frac{1}{8} e^{-2x}\right]_{-1}^{0} \ ;$$

$A = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8} e^2$ U.A donc $\mathbf{A \approx 2\,(e^2 - 5)\ cm^2}$.

$\mathbf{A = 4{,}7781\ cm^2}$, $A = 477{,}81\ mm^2$.

$\mathbf{A = 478\ mm^2}$ **au** $\mathbf{mm^2}$ **près.**



EXERCICE 2

La variable aléatoire X qui, à chaque comprimé prélevé au hasard dans la production associe sa masse, suit la loi normale $\mathcal{N}(1{,}2 ; 0{,}01)$, la variable aléatoire $T = \frac{X - 1{,}2}{0{,}01}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

A.1. La probabilité qu'un comprimé, tiré au hasard dans la production ait sa masse comprise entre 1,18 et 1,22 est

$P(1{,}18 \leq X \leq 1{,}22) = P(-2 \leq T \leq 2)$,

$P(1{,}18 \leq X \leq 1{,}22) = 2\pi(2) - 1$,

$P(1{,}18 \leq X \leq 1{,}22) \approx 2(0{,}9972) - 1$,

$\mathbf{P(1{,}18 \leq X \leq 1{,}22) \approx 0{,}954}$ à 10^{-3} près.

La probabilité qu'un comprimé, tiré au hasard dans la production ait sa masse comprise entre 1,18 et 1,22 est donc **0,994** à 10^{-3} près.

2. $P(1{,}2 - \alpha \leq X \leq 1{,}2 + \alpha) = 0{,}64$ équivaut à

$P(-\frac{\alpha}{0{,}01} \leq T \leq \frac{\alpha}{0{,}01}) = 0{,}64$, $2\pi(\frac{\alpha}{0{,}01}) - 1 = 0{,}64$,

$\pi(\frac{\alpha}{0{,}01}) = 0{,}82$, $\frac{\alpha}{0{,}01} \approx 0{,}915$, $\alpha \approx \mathbf{0{,}009}$.

B.1.a. On est en présence d'une succession de 20 épreuves indépendantes (prélèvements avec remise), chacune ayant deux issues : le comprimé n'est pas conforme de probabilité constante 0,05 ou le comprimé est conforme de probabilité 0,95. La variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 20 comprimés associe le nombre de comprimés non conformes, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0{,}05)$.

b. $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$

$P(Y \geq 1) = 1 - C_{20}^{0}(0{,}05)^{0}(0{,}95)^{20}$,

$P(Y \geq 1) = 1 - 0{,}95^{20}$, $\mathbf{P(Y \geq 1) = 0{,}642}$ à 10^{-3} près.

2.a. Cette loi peut être approchée par une loi de Poisson. Le paramètre est $\lambda = np$, $\lambda = 100 \times 0{,}05$, $\lambda = 5$.

b. La probabilité d'obtenir au plus 3 comprimés non conformes est :

$P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)$

On trouve dans le formulaire pour $\lambda = 5$:

$P(Y \leq 3) = 0{,}007 + 0{,}034 + 0{,}084 + 0{,}140$,

$\mathbf{P(Y \leq 3) = 0{,}265}$ à 10^{-3} près.

MICROTECHNIQUES

Session 1997

EXERCICE 1 (9 points)

Une machine produit, en grande quantité, des tiges métalliques de longueur théorique 145 mm.

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tige tirée au hasard dans la production, associe sa longueur mesurée en millimètres.

On admet que X suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma = 0{,}2$.

Les parties A et B sont indépendantes. On donnera les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

On admet, dans cette partie, que X suit la loi normale de moyenne m = 145 et d'écart type $\sigma = 0{,}2$.

Une tige est considérée comme défectueuse, lorsque sa longueur est supérieure à 145,5 mm *ou* inférieure à 144,6 mm.

Quelle est alors la probabilité qu'une tige, prise au hasard dans la production, soit défectueuse ?

Partie B

Pour vendre les tiges de cette production on conditionne ces tiges par lots de 100, assimilés à des échantillons non exhaustifs de taille 100.

On appelle Z la variable aléatoire qui, à chaque lot aléatoire de 100 tiges, associe la moyenne des longueurs des 100 tiges du lot.

Un client commande des lots de 100 tiges.

On lui annonce que la moyenne des longueurs des tiges est 145 mm.

Le client constate, en mesurant les longueurs des tiges d'un lot prélevé au hasard, que la moyenne des longueurs des tiges du lot est 145,1 mm. Peut-il, au seuil de 5 %, accepter l'affirmation du fournisseur ?

Pour répondre à cette question, on peut procéder de la façon suivante :

a) Construire un test bilatéral :

- Choisir une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1.
- Déterminer sous H_0 la loi suivie par Z ? Donner les paramètres de cette loi.
- Déterminer la région critique au risque de 5 %.
- Enoncer la règle de décision du test.

b) En utilisant le test pour l'échantillon, dire si, au seuil de 5 %, la moyenne des longueurs des tiges du lot est compatible avec celle annoncée par le fournisseur.

EXERCICE 2 (11 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3\ln(x+1) + 3.$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

PARTIE A

1. a) Calculer la limite de f(x) quand x tend vers -1. Que peut-on en déduire pour C ?

   b) Vérifier que $f(x) = (x+1)\left[\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{x+1} - 3\frac{\ln(x+1)}{x+1} + \frac{3}{x+1}\right]$.

   En déduire la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.

2. a) Calculer la dérivée f ' de f sur $]-1\,;+\infty[$.

   b) Etudier le signe de f ' sur $]-1\,;+\infty[$. En déduire les variations de f sur $]-1\,;+\infty[$.

3. Ecrire le développement limité, à l'ordre 2, de f(x) au voisinage de 0.

PARTIE B

1. Déduire de la question 3. Partie A, une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 ainsi que la position de T par rapport à C au voisinage du point d'abscisse 0.

2. Tracer T et C dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

3. a) Calculer la valeur exacte de $I = \int_0^2 \ln(1+x)\,dx$. (On utilisera une intégration par parties et on remarquera que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).

   b) Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

   En donner une valeur approchée à 1 mm^2 près.

EXERCICE 1 :

PARTIE A

La variable aléatoire X qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production associe sa longueur, suit la loi normale $\mathcal{N}(145\ ;\ 0{,}2)$, la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 145}{0{,}2}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

La probabilité qu'une tige, tirée au hasard dans la production ait sa longueur supérieure à 145,5 ou inférieure à 144,6 est $p = 1 - P(145{,}5 \le X \le 144{,}6)$ qui équivaut à

$p = P(-2 \le T \le 2{,}5)$, $p = 1 - [\pi(2{,}5) - \pi(2) - 1]$,

$p = 2 - 0{,}9772 - 0{,}9938$, $\mathbf{p \approx 0{,}029}$ à 10^{-3} près.

PARTIE B

a) Construction du test :

choix de H_0 : $m = 145$ *choix de H_1* : $m \ne 145$

détermination de la région critique :

Sous l'hypothèse H_0, $m = 145$, X suit la loi normale $\mathcal{N}(145\ ;\ 0{,}2)$, la variable aléatoire Z qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 tiges associe la moyenne des longueurs des 100 tiges de cet échantillon, suit alors la loi normale $\mathcal{N}(145\ ;\ \dfrac{0{,}2}{\sqrt{100}})$, soit $\mathcal{N}(145\ ;\ 0{,}02)$.

la variable aléatoire $T' = \dfrac{X - 145}{0{,}02}$ suit la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(145 - h \le Z \le 145 + h) = 0{,}95$ équivaut à

$P(-\dfrac{h}{0{,}02} \le T \le \dfrac{h}{0{,}02}) = 0{,}95$ et à $2\pi(\dfrac{h}{0{,}02}) - 1 = 0{,}95$

et à $\dfrac{h}{0{,}02} = 1{,}96$, $\mathbf{h = 0{,}039}$ **à** $\mathbf{10^{-3}}$ près.

$P(144{,}961 \le Z \le 145{,}039) = 0{,}95$.

Si H_0 est vraie on a 95% de chances de prélever un échantillon aléatoire dont la moyenne appartient à l'intervalle $I = [\ 144{,}961\ ;\ 145{,}039]$

règle de décision :

si $\overline{x} \in [144{,}961\ ;\ 145{,}039]$ on accepte H_0.

si $\overline{x} \notin [144{,}961\ ;\ 145{,}039]$ on rejette H_0 on accepte H_1.

b) *Utilisation du test :* $\overline{x} = 145{,}1$,

$\overline{x} \notin [144{,}961\ ;\ 145{,}039]$ on rejette, H_0 on accepte H_1.

La moyenne des longueurs des tiges du lot n'est pas compatible au risque de 5 % avec celle annoncée par le fournisseur.

EXERCICE 2

1° a) Pour tout réel de l'intervalle $]-1\ ,\ +\infty[$,

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x - 1)^2 - 3\ln(1 + x) + 3$,

$\lim\limits_{x \to -1} \ln(1 + x) = \lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to -1} (x - 1)^2 = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$,

la droite d'équation $x = -1$ est donc asymptote à C .

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)} - 3\dfrac{\ln(1+x)}{x+1} + \dfrac{3}{x+1}\right]$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\ln u}{u} = 0$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x+1} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}(x+1)\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)} = +\infty$.

2\. a) $f'(x) = x - 1 - \dfrac{3}{1 + x}$), $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{1 + x}$.

b) Sur $]-1\ ,\ +\infty[$, $1 + x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(x - 2)(x + 2)$, $x + 2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 2$.

x	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3{,}5 - 3\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

3\. A l'aide du formulaire on trouve le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 2 suivant :

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, d'où

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 3\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2} - 3x + \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$f(x) = \dfrac{7}{2} - 4x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

PARTIE B

D'après la question 3. $f(x) = \dfrac{7}{2} - 4x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ donc la droite d'équation

$y = -4x + 3{,}5$ est tangente à C au point d'abscisse 0.

$f(x) - \left(\dfrac{7}{2} - 4x\right) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$y_C - y_T = 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$y_C - y_T$ est du signe de $x^2 > 0$, la courbe C est donc au dessus de t au voisinage du point d'abscisse 0.

b. $I = \displaystyle\int_0^2 \ln(1 + x)\,dx$

En posant $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln(x + 1)$,

$u(x) = x$ $v'(x) = \dfrac{1}{x + 1}$,

$I = [x\ln(x + 1)]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right) dx$,

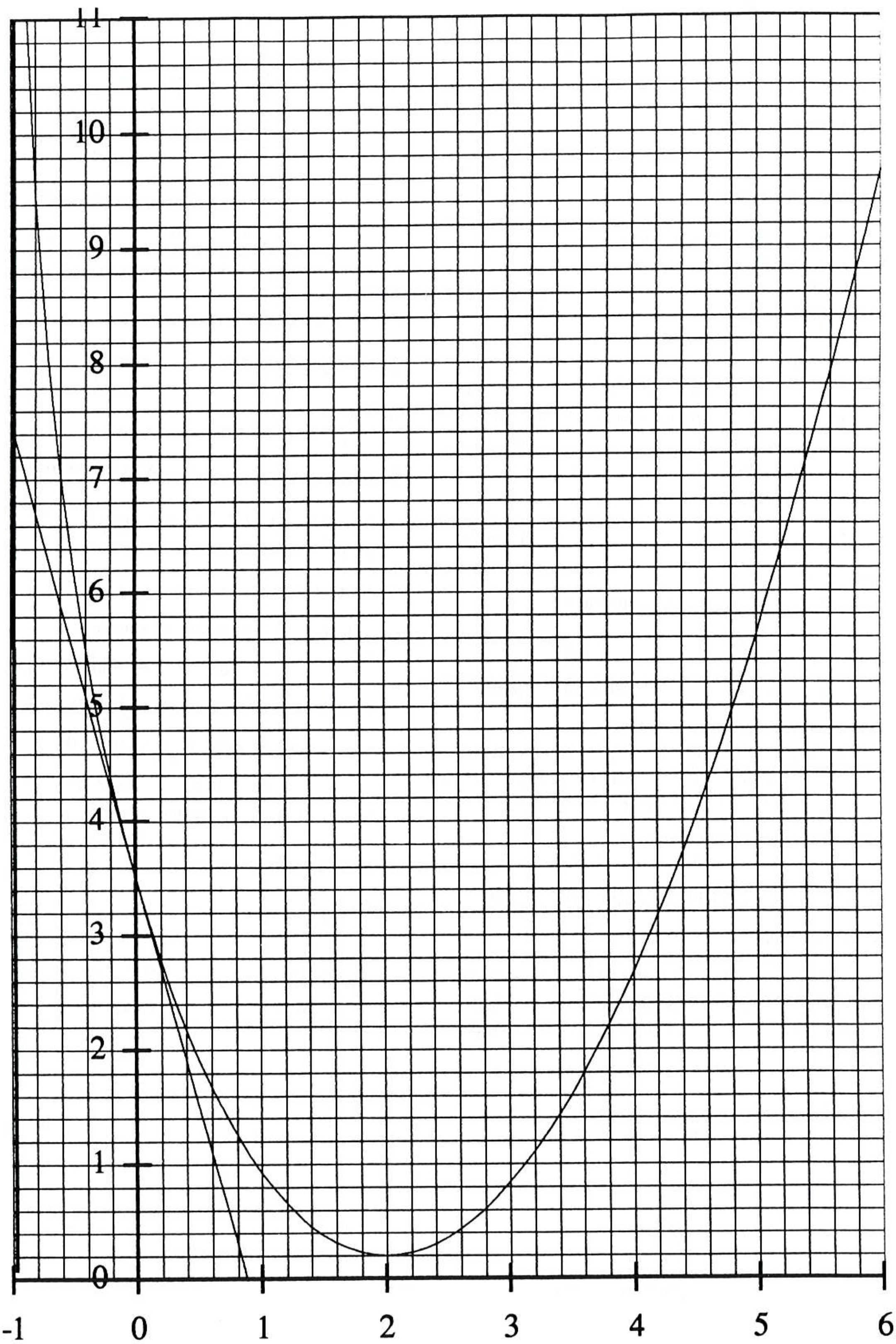
$I = [x\ln(x + 1) - x + \ln(x + 1)]_0^2$,

$I = 2\ln 3 - 2 + \ln 3$, $\mathbf{I = 3\ln 3 - 2}$.

b. $A = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, $A = \left[\dfrac{1}{6}(x - 1) + 3x\right]_0^2 - 3I$,

$A = \dfrac{1}{6} + 6 + \dfrac{1}{6} - 3(3\ln 3 - 2)$, $A = \left(\dfrac{37}{3} - 9\ln 3\right)$ UA,

1 UA = 4 cm^2 donc A = 9,78 cm^2 à 1 mm^2 près.


11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4
5
6

EN ASSISTANCE TECHNIQUE D'INGENIEUR

EN ASSISTANCE TECHNIQUE D'INGENIEUR

SESSION 1996

EXERCICE 1 (11 points)

La cote z d'un solide en mouvement est régie par l'équation différentielle suivante :

(E) $m z'' + k z = \delta \cos \omega t$ où z désigne une fonction de la variable t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, où z ' est la dérivée de z et où z '' est la fonction dérivée seconde.

I On donne $m = 2$ kg ; $k = 32$ N.m^{-1} ; $\delta = 48$ N ; $\omega = 2$ rad.s^{-1}.

1. Chercher une solution particulière z_0 de l'équation (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$z_0(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t .$$

2. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

On s'intéresse dans toute la suite de l'exercice à la solution f de (E) vérifiant :

$$f(0) = 3 ; f'(0) = 0 .$$

3. Déterminer, pour tout réel t, l'expression de f(t).

II Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos 4t + 2 \cos 2t$.

1. a) Montrer qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Montrer que pour tout réel t, $f'(t) = -8 \sin 3t \cos t$.

c) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

En donner une valeur approchée à 10^{-2} près, en justifiant la réponse.

c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, sur l'intervalle $[0, \pi]$, (unités graphiques 2 cm).

On expliquera précisément comment on déduit le tracé sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ du tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

EXERCICE 2 (9 points)

Toutes les valeurs approchées seront données à 10^{-2} près.

Une machine automatique remplit des paquets dont la masse théorique doit être de 250 g.

I. Les masses observées pour un échantillon de 100 paquets, pris au hasard à la sortie de la machine, ont donné les résultats suivants :

Masse en grammes	[215, 225[	[225, 235[	[235, 245[	[245, 255[	[255, 265[	[265, 275[	[275, 285[
Nombre de paquets	7	11	19	26	18	13	6

1. En supposant que, dans chaque classe, tous les éléments sont situés au centre de la classe, déterminer la masse moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ' de cet 'échantillon.
2. Proposer une estimation ponctuelle de la moyenne m et de l'écart type s de la population.
3. Déterminer un intervalle de confiance, centré en $\overline{x}$, au risque de 5 %, de la masse moyenne de la population.

II On suppose que la probabilité que la masse d'un paquet appartienne à l'intervalle [245, 255[est 0,26.

On effectue des contrôles sur des échantillons de n paquets choisis au hasard et avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de n paquets associe le nombre de paquets dont la masse est dans l'intervalle [245, 255[.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On suppose que n = 6.
   Déterminer la probabilité d'obtenir dans un tel échantillon exactement 4 paquets dont la masse est dans l'intervalle [245, 255[.
3. Déterminer la valeur minimum n_0 de n, entier strictement positif, pour que la probabilité d'obtenir au moins un paquet de masse appartenant à l'intervalle [245, 255[soit supérieure à 0,95.

III. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque paquet prélevé au hasard à la sortie de la machine, associe la masse de ce paquet, exprimée en grammes ; elle suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 15,8 g .

1. On prend m = 250 g
   Déterminer la probabilité que la masse d'un paquet pris au hasard à la sortie de la machine soit inférieure à 245 g.
2. Un réglage de la machine permet de faire varier la valeur de m (l'écart type est inchangé).
   Sur quelle valeur de m, au gramme près, doit être réglée la machine pour que $P(Y \leq 245) \leq 0,1$.

EXERCICE 1

I On donne $m = 2$ kg ; $k = 32$ N.m^{-1} ; $\delta = 48$ N ; $\omega = 2$ rad.s^{-1}, l'équation (E) est alors

$2z'' + 32z = 48\cos 2t$ soit $z'' + 16z = 24\cos 2t$.

1. La fonction z_0 définie par $z_0(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ est solution particulière de (E) : si et seulement si elle vérifie l'équation (E), $z_0'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$,

$z_0''(t) = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$ en remplaçant dans (E) :

$z_0''(t) + 16z_0(t) = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t + 16A\cos 2t + 16B\sin 2t = 24\cos 2t$ ce qui équivaut à

$12A\cos 2t + 12B\sin 2t = 24\cos 2t$ on en déduit pour tout réel t : $A = 2$ et $B = 0$; $\mathbf{z_0(t) = 2\cos 2t}$

2. (E_0) : $z'' + 16z = 0$ est une équation différentielle linéaire d'équation caractéristique : $r^2 + 16 = 0$ qui admet pour racines $r_1 = 4i$ et $r_2 = -4i$.

Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont des fonctions z_1 définies sur R par :

$\mathbf{z_1(t) = A\cos 4t + B\sin 4t}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

Les fonctions solutions de (E) sont définies par

$z(t) = z_0(t) + z_1(t)$

$\mathbf{z(t) = 2\cos 2t + A\cos 4t + B\sin 4t}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

3. $z'(t) = -4\sin 2t - 4A\sin 4t + 4B\cos 4t$;

$f(0) = 3$ donc $2 + A = 3$ d'où $A = 1$;

$f'(0) = 0$ donc $4B = 0$ d'où $B = 0$;

$\mathbf{f(x) = 2\cos 2t + \cos 4t}$.

II 1. a) f est périodique de période π donc on peut réduire l'étude à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, de plus $f(-t) = f(t)$, f est paire sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on peut donc réduire l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) $f'(t) = -4\sin 4t - 4\sin 2t$, $f'(t) = -4(\sin 4t + \sin 2t)$,

$f'(t) = -4(2\sin(\frac{4t+2t}{2}).\cos(\frac{4t-2t}{2}))$,

$f'(t) = -8\sin 3t\cos t$.

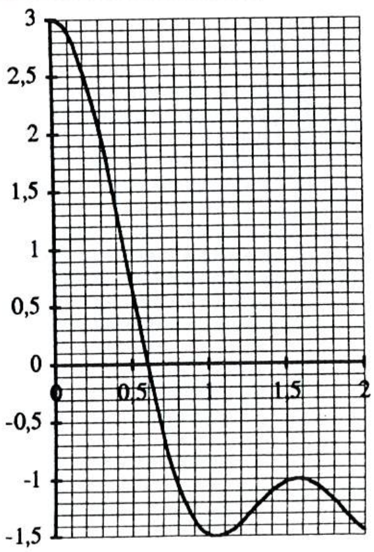
c)

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
cos t	1	+	$\frac{1}{2}$	+	0
sin 3t	0	+	0	–	– 1
f '(t)		–			
f(t)	3	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	–1

d) f est définie, continue, strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, $f(0) = 3$ et $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2}$ donc il existe un unique réel α dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On trouve à l'aide du graphique ou de la calculatrice $\alpha = -0,6$.

e)



2. $$I = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} (\cos 4t + 2\cos 2t)\,dt,$$

$$I = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + \sin 2t\right]_0^{\pi/2}, \quad I = 0.$$

EXERCICE 2

1° La calculatrice donne pour moyenne et écart type :

$\overline{x}$ **= 250** et σ' **= 15,81** à 10^{-2} près.

2° Une estimation ponctuelle de m est **250** une estimation ponctuelle de σ est $15{,}81\sqrt{\frac{100}{99}}$ soit15,89 à 10^{-2} près.

Un intervalle de confiance de la moyenne m avec le coefficient de confiance 95 % centré en $\overline{x}$ est l'intervalle

$[\overline{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$.

avec $\overline{x} = 250$, σ est estimé par 15,89 et n = 100,

on obtient : [250 - 1,96 × 1,589 ; 250 + 1,96 × 1,589]

Donc un intervalle de confiance de m au seuil de risque 5 % est **[246,89 ; 253,11]**.

II. 1. On est en présence de n tirages indépendants débouchant sur deux issues de probabilités respectives : $p = 0{,}26$ et $q = 0{,}74$. La variable aléatoire X qui, à tout échantillon non exhaustif de n paquets testés par le service "contrôle", associe le nombre paquets dont la masse appartient à l'intervalle [245, 255[suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n ; 0,26).

2) n = 6. $P(X = 4) = C_6^4(0{,}26)^4(0{,}74)^2$,

$P(X = 4) \approx 0{,}0375$, $\mathbf{P(X = 4) = 0{,}04}$ à 10^{-2} près.

3) On cherche la valeur minimale n_0 de n telle que

$P(X \geq 1) > 0{,}95$ qui équivaut à

$P(X = 0) \leq 0{,}05$ et à $(0{,}74)^n \leq 0{,}05$ et à

$n\ln(0{,}74) \leq \ln(0{,}05)$, (la fonction ln étant croissante).

On obtient $n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}74)}$ soit $n \geq 9{,}949$.

La valeur minimale n_0 de n pour que $P(X \geq 1) > 0{,}95$ est donc $\mathbf{n_0 = 10}$.

III. 1. La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(250 ; 15{,}8)$, la variable aléatoire $T = \frac{Y - 250}{15{,}8}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(Y \leq 245) = P(T \leq -0{,}316)$,

$P(Y \leq 245) = 1 - \pi(0{,}316)$,

$P(Y \leq 245) = 1 - 0{,}624$

$\mathbf{P(Y \leq 245) = 0{,}38}$ à 10^{-2} près.

2. La variable aléatoire Y suit la loi $\mathcal{N}$ (m ; 15,8), la variable aléatoire $T = \frac{Y-m}{15{,}8}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$P(Y \leq 245) \leq 0{,}1$ équivaut à $P(T \leq \frac{245 - m}{15{,}8}) \leq 0{,}1$ et à $\frac{245 - m}{15{,}8} \leq -1{,}28$, $m \geq 265{,}225$ d'où **m = 265 g**.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUE

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b,\quad$ où $\quad a > 0 \quad$ et $\quad b > 0$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right].$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}),\quad ch\, t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}),\quad sh\, t = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
$ch\, t$	$sh\, t$
$sh\, t$	$ch\, t$
$\mathrm{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\mathrm{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$e^{at}\quad a \in \mathbb{C}$	$a\, e^{at}$

3. DÉVELOPPEMENTS LIMITES :

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t).$$

4. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique : $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i, \quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} n_i c_i.$

b) Variance et écart-type : $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)-(\bar{x})^2, \quad \sigma=\sqrt{V}.$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance : $\sigma_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)-\bar{x}\,\bar{y}$

$$y=ax+b, \quad \text{où} \quad a=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}; \qquad x=a'y+b', \quad \text{où} \quad a'=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}.$$

d) Corrélation linéaire : $r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$

5. PROBABILITÉS :

a) Loi binomiale : $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad E(X)=np, \quad \sigma(X)=\sqrt{npq}.$

b) Loi de Poisson : $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad E(X)=\lambda, \quad V(X)=\lambda.$

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0; 1)$

$$\pi(t) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

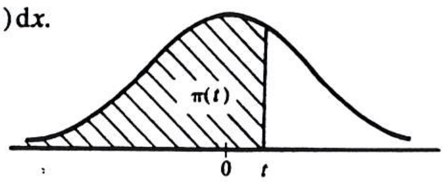


Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\pi(t)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota : La table donne les valeurs de $\pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1{,}37$ $\pi(t = 1{,}37) = 0{,}9147$

pour $t = -1{,}37$ $\pi(t = -1{,}37) = 0{,}0853$.

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9981	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9898	0,9901	0,9904	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Loi exponentielle :

Fonction de de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F) $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

Loi de Weibull :

Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$

$E(X) = A\,\eta + \gamma$ (M.T.B.F) $\sigma(X) = B\,\eta$

β	A	B
0,20	120	1901
0,25	24	199
0,30	9,2605	50,08
0,35	5,0291	19,98
0,40	3,3234	10,44
0,45	2,4786	6,46
0,50	2	4,47
0,55	1,7024	3,35
0,60	1,5046	2,65
0,65	1,3663	2,18
0,70	1,2638	1,85
0,75	1,1906	1,61
0,80	1,1330	1,43
0,85	1,0880	1,29
0,90	1,0522	1,17
0,95	1,0234	1,08
1	1	1
1,051	0,9603	0,934
1,10	0,9649	0,878
1,15	0,9517	0,830
1,20	0,9407	0,787
1,25	0,9314	0,750
1,30	0,9236	0,716
1,35	0,9170	0,687
1,40	0,9114	0,660
1,45	0,9067	0,635

β	A	B
1,50	0,9027	0,613
1,55	0,8994	0,593
1,60	0,8966	0,574
1,65	0,8942	0,556
1,70	0,8922	0,540
1,75	0,8906	0,525
1,80	0,8893	0,511
1,85	0,8882	0,498
1,90	0,8874	0,486
1,95	0,8867	0,474
2	0,8862	0,463
2,1	0,8857	0,443
2,2	0,8856	0,425
2,3	0,8859	0,409
2,4	0,8865	0,393
2,5	0,8873	0,380
2,6	0,8882	0,367
2,7	0,8893	0,355
2,8	0,8905	0,344
2,9	0,8917	0,334
3	0,8930	0,325
3,1	0,8943	0,316
3,2	0,8957	0,307
3,3	0,8970	0,299
3,4	0,8984	0,292
3,5	0,8997	0,285
3,6	0,9011	0,278
3,7	0,9025	0,272
3,8	0,9038	0,266
3,9	0,9051	0,260

β	A	B
4	0,9064	0,254
4,1	0,9077	0,249
4,2	0,9089	0,244
4,3	0,9102	0,239
4,4	0,9114	0,235
4,5	0,9126	0,230
4,6	0,9137	0,226
4,7	0,9149	0,222
4,8	0,9160	0,218
4,9	0,9171	0,214
5	0,9182	0,210
5,1	0,9192	0,207
5,2	0,9202	0,203
5,3	0,9213	0,200
5,4	0,9222	0,197
5,5	0,9232	0,194
5,6	0,9241	0,191
5,7	0,9251	0,188
5,8	0,9260	0,185
5,9	0,9269	0,183
6	0,9277	0,180
6,1	0,9286	0,177
6,2	0,9294	0,175
6,3	0,9302	0,172
6,4	0,9310	0,170
6,5	0,9318	0,168
6,6	0,9325	0,166
6,7	0,9333	0,163
6,8	0,9340	0,161
6,9	0,9347	0,160

AUTEURS
Commission Inter-IREM Lycées technologiques

Geneviève SAINT-PIERRE
Bernard VERLANT

EDITEUR
IREM de PARIS-NORD

DATE
Octobre 1997

NIVEAU
BTS

MOTS CLES
BTS 96-97 Mécanique

RESUME

Cette brochure regroupe des textes modifiés tirés des exercices ou problèmes posés à des épreuves de BTS de la filière Mécanique des sessions 1996 et 1997.

Universite PARIS-NORD

I.R.E.M

Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE

Téléphone : 01 49 40 36 40
Télécopie : 01 49 40 36 36